

「粒子加速器」講義メモ

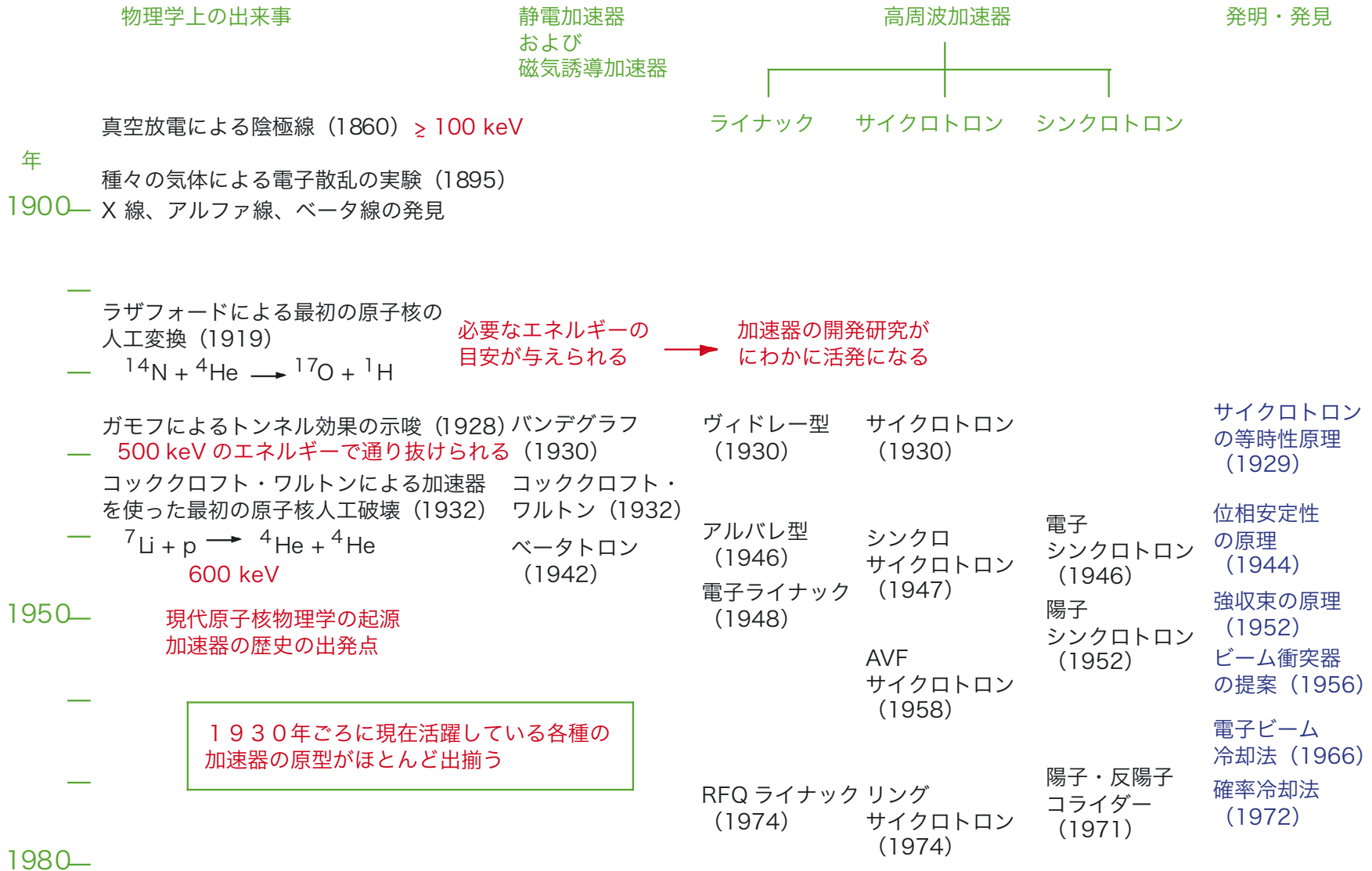
(東京大学大学院理学研究科、2002 年 ～ 2010 年)

後藤 彰

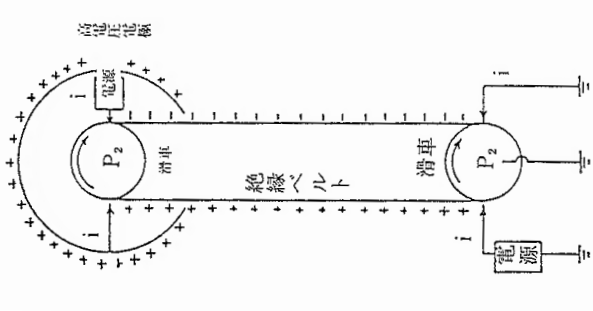
講義内容

1. 加速器の歴史と概要
2. 古典的サイクロトロン、弱収束、ベータトロン振動、チューン
3. AVF サイクロトロン ($\cos\theta$ 磁場型)、強収束
4. 横方向のビーム運動学 (運動方程式、転送行列、周期解と Twiss パラメータ)
5. 横方向のビーム運動学 (ベータトロン振動の安定性、リューヴィルの定理、不変量、FODO セル)
6. AVF サイクロトロン (階段関数磁場型)、リングサイクロトロン、横方向のビーム運動学 (分散)
7. 横方向のビーム運動学 (チューンシフト、クロマチシティ)、縦方向のビーム運動学 (位相安定性、シンクロトロン振動)
8. 断熱減衰、共鳴 (整数共鳴、半整数共鳴)
9. 共鳴 (結合共鳴)、ビーム入射・取出し
10. 空間電荷効果、ルミノシティ、ビーム冷却、放射光
11. 電磁石
12. 超伝導電磁石
13. 高周波 (導波管、共振器)
14. 高周波 (分布定数回路、 $\lambda/4$ 同軸型共振器)
15. まとめ

加速器の歴史



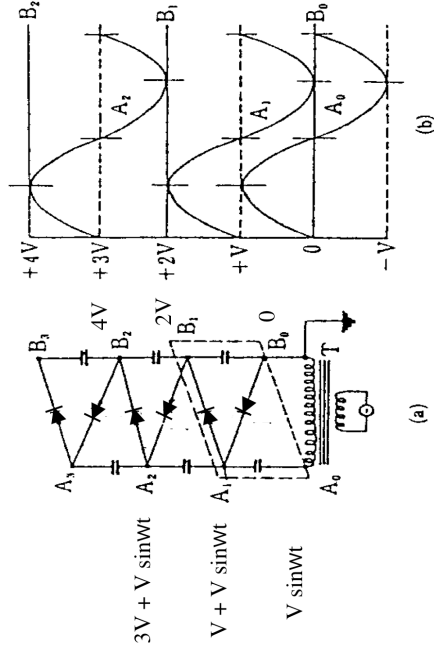
- ・絶縁ベルトやペレットチェーンで電荷を電極に運ぶ
- ・数 MV
- ・原子核の精密実験に使われる



バンデグラーフ*

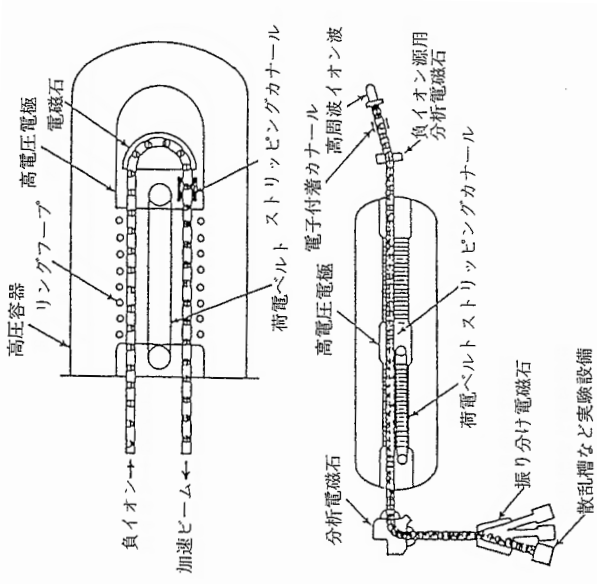
* 「加速器工学ハンドブック（日本原子力会議編）」より抜粋（以下同様）

- ・多段階電圧整流器
- ・数 100 kV ～ 1 MV
- ・ライナックの前段入射器として使われる
(現在は RFQ ライナックにとって代わられる)



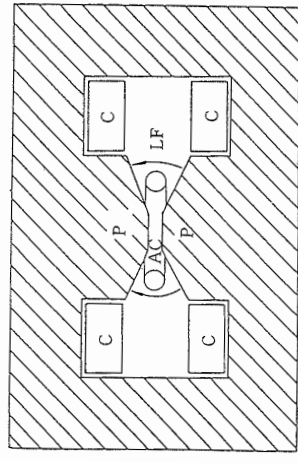
コッククロフト・ウォルトン型加速器

- ・同じ電圧でビームエネルギーが2倍以上
- ・数 MV ～ 30 MV
- ・東大、筑波大、京大、九大、原研

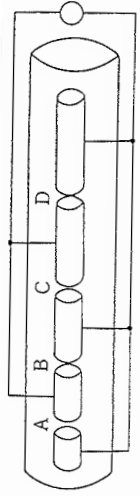


タンデム・バンデグラフ

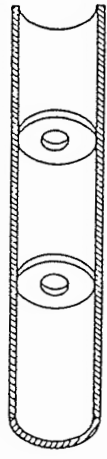
- ・磁気誘導加速器
- ・閉軌道内の磁束の時間変化によって発生する電場で加速される
- ・数 MeV ～ 数 10 MeV
- ・医療用に使われる



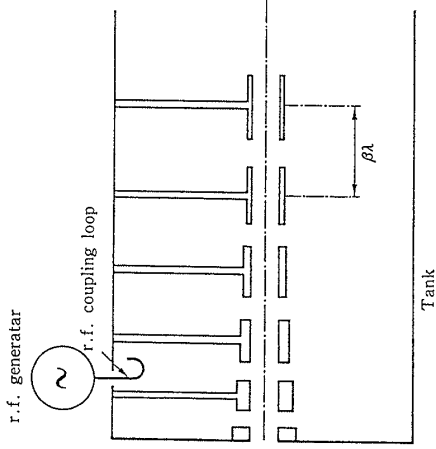
ベータトロン



ヴィンデレー型ライナック

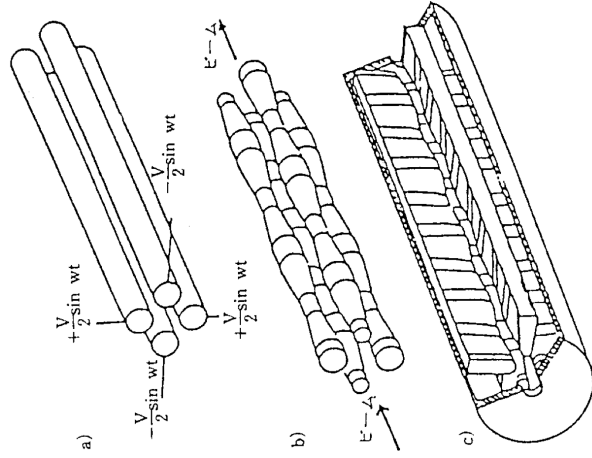


電子ライナック



アルバレー型ライナック

- LAMPF : 800 MeV 陽子
- SLAC : 50 GeV 電子
- GSI : 20 MeV/核子 重イオン
- 理研 : 数 MeV/核子 重イオン
- リニアコライダー : 500 GeV x 2 電子・陽電子

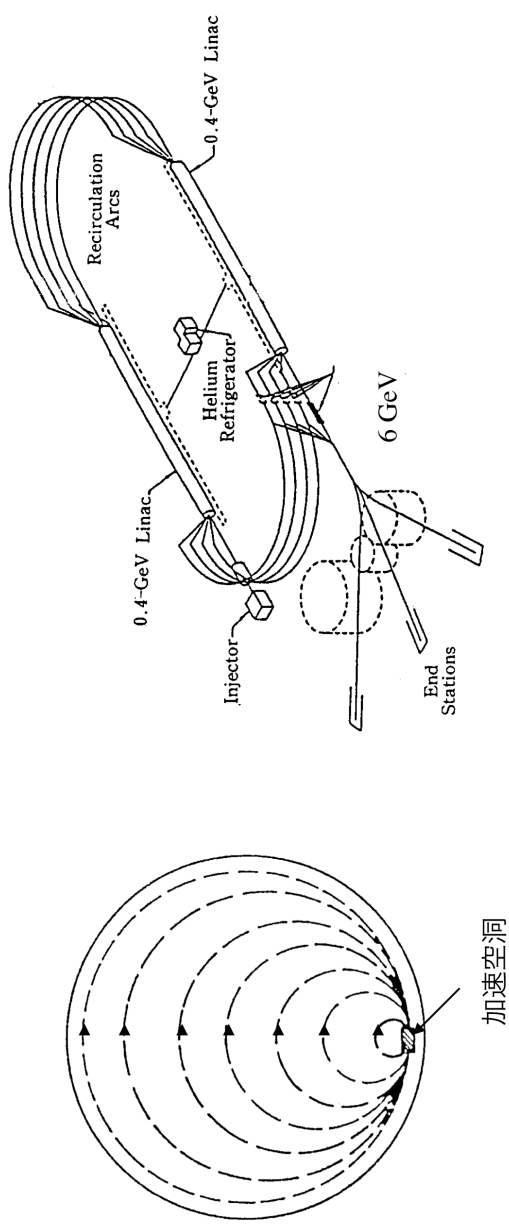


- ほとんどのライナックでは入射器としてこのRFQ ライナックが使われる
- イオンの収束と加速を電場で同時に行う
- 入射イオンの 100 % 近くを捕獲し加速できる
- q (イオンの電荷数) x 数 100 keV

RFQ (高周波四重極) ライナック

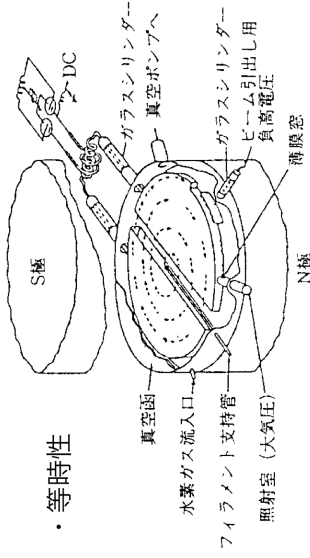
- ・電子が1周回当りに受けるエネルギーが静止エネルギーに等しいようにする

- ・数 10 MeV

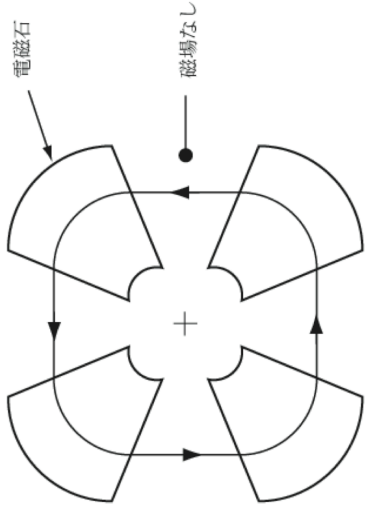


マイクロトロン

連続電子ビーム加速装置 (CEBAF)

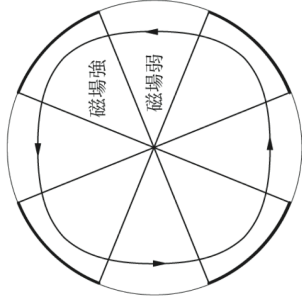


サイクロトロン



分離セクター型サイクロトロン
(リングサイクロトロン)

- ・方位角方向の磁場分布に強弱をつけたもの
- ・陽子エネルギー へく 100 MeV
- ・原子核の実験に使われる



AVF サイクロトロン

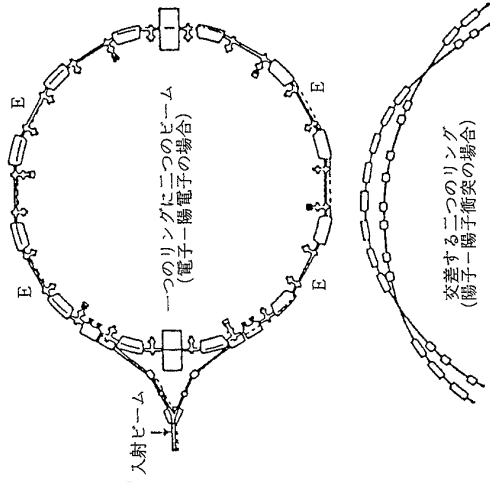
- ・方位角方向の磁場分布の強弱を極端につけたもの
- ・高いビームエネルギー

PSI : 590 MeV 陽子

理研 : $K = 540, 2500 \text{ MeV/核子}$ 重イオン

$$E (\text{MeV/核子}) = K * (Q/A)^{1/2}$$

- ・重イオン核物理の実験に使われる



シンクロトロン／ビームコライダー

- ・位相安定性
- ・強収束
- ・コライダー
- ・ビーム冷却
- ・高エネルギービーム

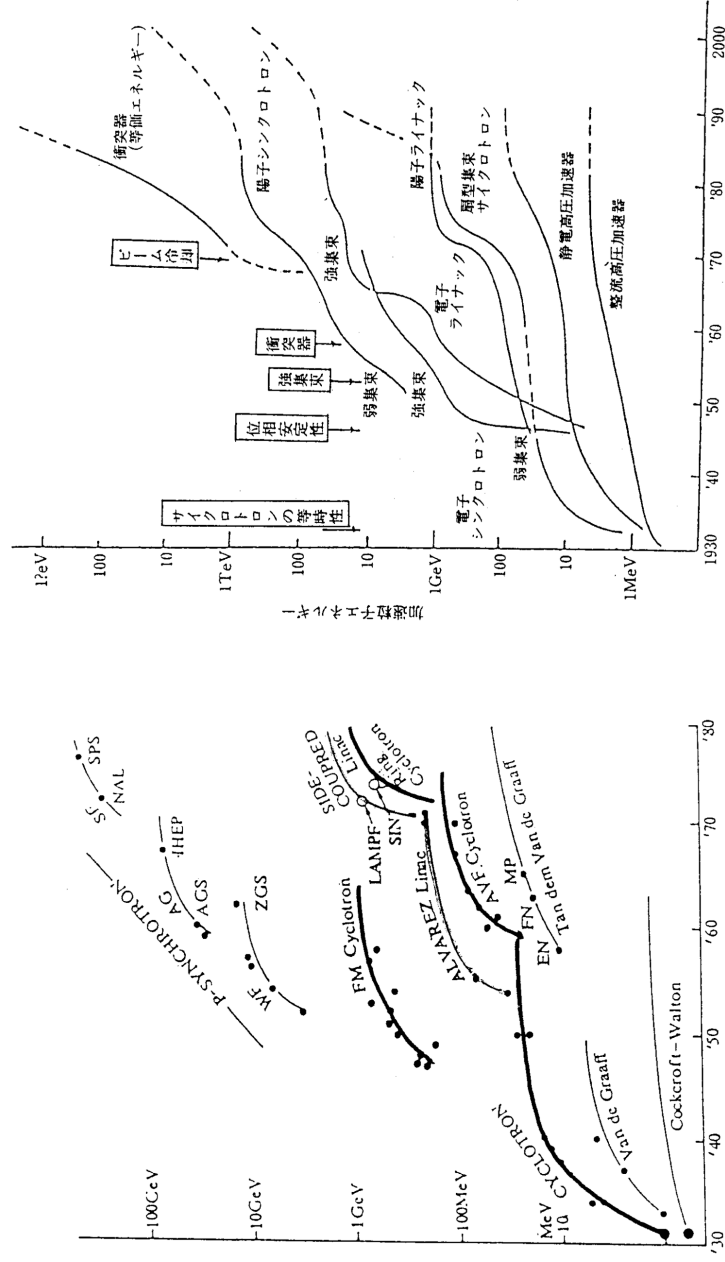
HERA (DESY) : 電子 26 GeV x 陽子 820 GeV

RHIC (BNL) : 重イオン 100 GeV/核子 x 2

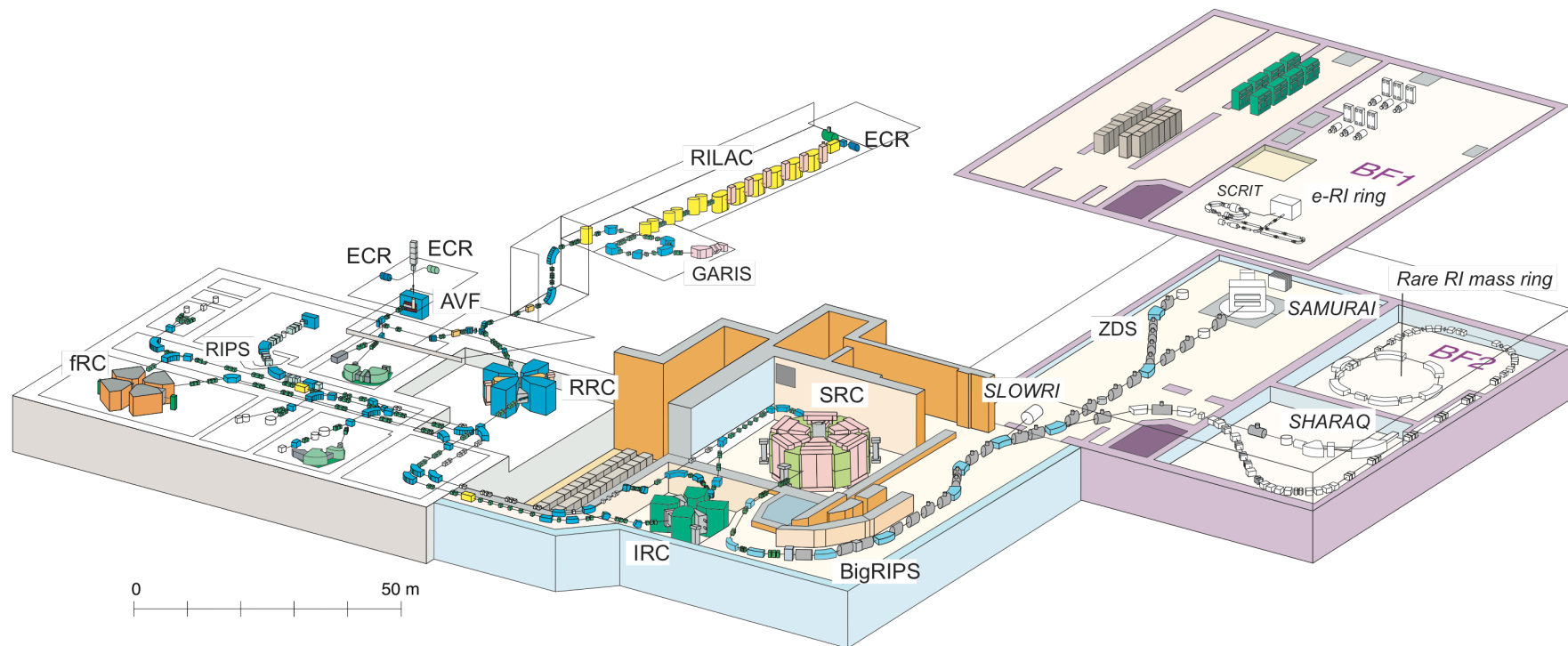
LHC (CERN) : 陽子 7 TeV x 2

- ・素粒子の実験に用いられる

加速粒子のエネルギーの進歩



理研 RI ビームファクトリー



加速器を構成する主な機器

- ・電磁石 Magnet
- ・高周波 Radio-frequency (RF)
- ・真空 Vacuum
- ・イオン源 Ion source
- ・ビーム診断 Beam diagnostics

加速器が関係する主な学問分野

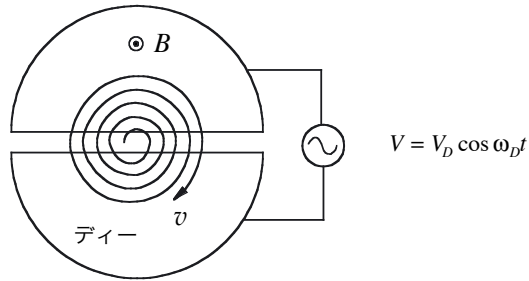
- ・物理学 Physics
- ・振動論 Oscillation theory
- ・電磁気学 Electromagnetics
- ・機械工学 Mechanical engineering
- ・材料物性 Materials science
- ・真空工学 Vacuum engineering
- ・低温工学 Cryogenic engineering
- ・超伝導工学 Superconducting engineering

参考文献

- (1) 実験物理学講座 28 加速器
熊谷寛夫 責任編集
共立出版 (1975)
- (2) 電磁気学の基礎 -実験室における-
熊谷寛夫
裳華房 (1968)
- (3) 物理学選書3 電磁気学
高橋秀俊
裳華房 (1970)
- (4) 加速器の原理 シンクロトロン及びストレージング
神谷幸秀
OH0 '84 (KEK, 1984)
- (5) The Physics of Particle Accelerators
An Introduction
K. Wille
Oxford University Press (2000)
- (6) An Introduction to Particle Accelerators
E. Wilson
Oxford University Press (2001)
- (7) An Introduction to the Physics of Particle Accelerators
M. Conte and W. W. MacKay
World Scientific (1991)
- (8) The Principles of Circular Accelerators and Storage
Rings
P. J. Bryant and K. Johnson
Cambridge University Press (1993)
- (9) Classical Electrodynamics
J. D. Jackson
John Wiley & Sons, Inc. (1974)

サイクロトロン

1929年 E. O. Lawrence が発明



特徴

1. 静磁場
2. 等時性 (サイクロトロン共鳴原理)

$$qvB = \frac{mv^2}{\rho} \Rightarrow \omega = \frac{v}{\rho} = \frac{qB}{m}$$

q : 電荷 B : 磁場強度 v : 速度
 m : 質量 ρ : 軌道半径 ω : 角速度

$$f [\text{MHz}] = 15.35 \frac{Q}{A} B [\text{T}], \quad A: \text{原子量} \quad Q: \text{荷電数} \quad f: \text{軌道周波数}$$

$$\omega_D = \omega$$

3. らせん軌道
4. 連続ビーム

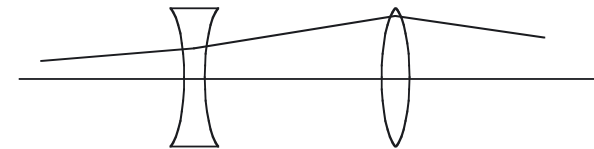
弱収束と強収束

弱収束 . . . 常に弱い収束を作用させる

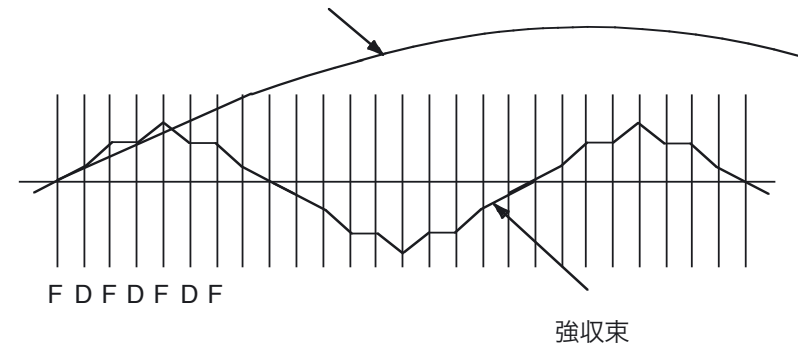
=> 全体的に弱い収束

強収束 . . . 強い収束、発散を交互にくり返して作用させる

=> 全体的に強い収束



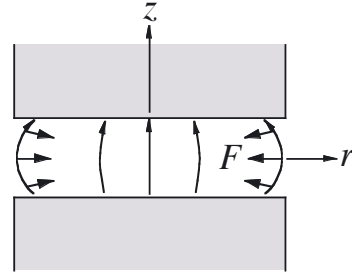
弱収束



弱収束を用いたサイクロトロン

普通型サイクロトロン

古典的サイクロトロン



垂直方向（z 方向）の運動

$$F_z = qv_\theta B_r$$

$$= qv_\theta \frac{\partial B_r}{\partial z} z = qv_\theta \frac{\partial B_z}{\partial r} z \quad (\because \nabla \times \vec{B} = 0)$$

$$= q\omega r \frac{\partial B_z}{\partial r} z = m\omega^2 \frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} z$$

$$= m\omega^2 \mu' z$$

$$\mu' = \frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} = -n$$

運動方程式

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \mu' \omega^2 z = \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_z^2 z = 0 \quad (t: \text{独立変数})$$

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} - \mu' z = \frac{d^2 z}{d\theta^2} + \nu_z^2 z = 0 \quad (\theta = \omega t: \text{独立変数})$$

$$\nu_z = \frac{\omega_z}{\omega} = \sqrt{-\mu'}$$

ν_z : ベータトロン振動数

$$\text{収束条件: } \mu' < 0 \quad \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} < 0 \right)$$

水平方向（r 方向）の運動

平衡軌道（Equilibrium orbit: 一様磁場の場合、半径 R の円軌道）からのずれ x

$$r = R + x$$

$$\text{運動方程式} \quad -qv_\theta B_z = m \left(-\frac{v^2}{r} + \frac{d^2 r}{dt^2} \right)$$

$$B_z(r) = B_z(R) + \frac{\partial B_z}{\partial r} x + \dots$$

$$-qv_\theta [B_z(R) + \frac{\partial B_z}{\partial r} x] = m \left(-\frac{v^2}{R+x} + \frac{d^2 x}{dt^2} \right)$$

$$-qv_\theta \frac{\partial B_z}{\partial r} x = \frac{mv^2 x}{R^2} + m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$x \ll R$ とすると

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 (1 + \mu') x = \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_r^2 x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + (1 + \mu') x = \frac{d^2 x}{d\theta^2} + \nu_r^2 x = 0$$

$$\nu_r = \frac{\omega_r}{\omega} = \sqrt{1 + \mu'}$$

ν_r : ベータトロン振動数

$$\text{収束条件: } \mu' > -1 \quad \left(\frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} > -1 \right)$$

水平・垂直両方向とも収束する条件

$$-1 < \mu' < 0$$

または

$$0 < n < 1$$

または

$$0 < v_r, v_z < 1$$

ベータトロン振動

$$v_r = \frac{\omega_r}{\omega}, \quad v_z = \frac{\omega_z}{\omega}; \quad v: \text{ベータトロン振動数}$$

例 $\mu' = -1$ のとき
($v_r = 0$ のとき)

$$\frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} = -1$$

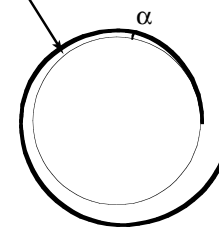
$$\frac{\partial \ln B_z}{\partial r} = -1$$

$$\therefore B_z \propto \frac{1}{r}$$

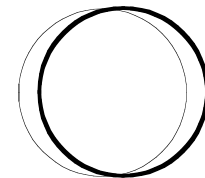
$\mu' = 0$ のとき
($v_r = 1$ のとき)

$$B_z = \text{const}$$

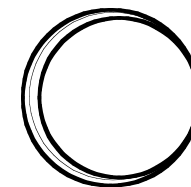
平衡軌道



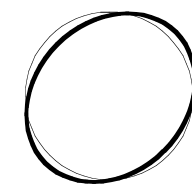
$$v_r = 0$$



$$v_r = 1$$



$$v_r = 0.5$$



$$v_r = 2$$

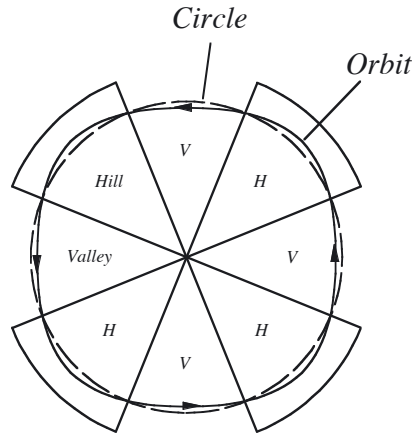
強収束を用いたサイクロトロン

AVFサイクロトロン

SFサイクロトロン

[AVF: Azimuthally Varying Field
SF : Sector Focusing]

ラジアルセクター型



L. H. Thomas,
Phys. Rev. 54,
580 & 598 (1938)

等時性磁場 $\bar{B}(r) = \gamma B_c \rightarrow \mu' = \frac{r}{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial r} > 0$ (発散)

⇓

方位角方向の磁場分布に強弱をつけることによって、この問題を解決。

普通型サイクロトロンの限界

垂直方向の収束 $\rightarrow$ 半径とともに減少する磁場が必要

$qB/m_0 = \omega = \omega_D = \text{一定} \rightarrow$ 一定磁場が必要

さらに、

相対論効果 $\rightarrow$ 半径とともに増加する磁場が必要 $\Rightarrow$ 垂直方向に発散！

$$B = \frac{m}{q} \omega = \frac{m_0 \omega \gamma}{q} \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c} \right)$$

磁場のずれ (ΔB) と位相のずれ ($\Delta\phi$) の関係

$$\Delta\phi = -360^\circ h \int_0^N \frac{\Delta B}{B} dn$$

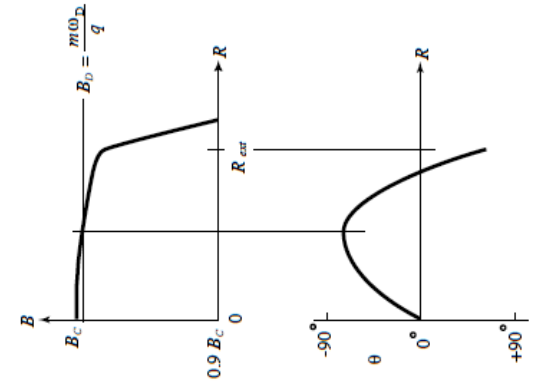
$$h = \frac{f_{rf}}{f_{orb}} : \text{ハーマニクス}$$

N: ターン数

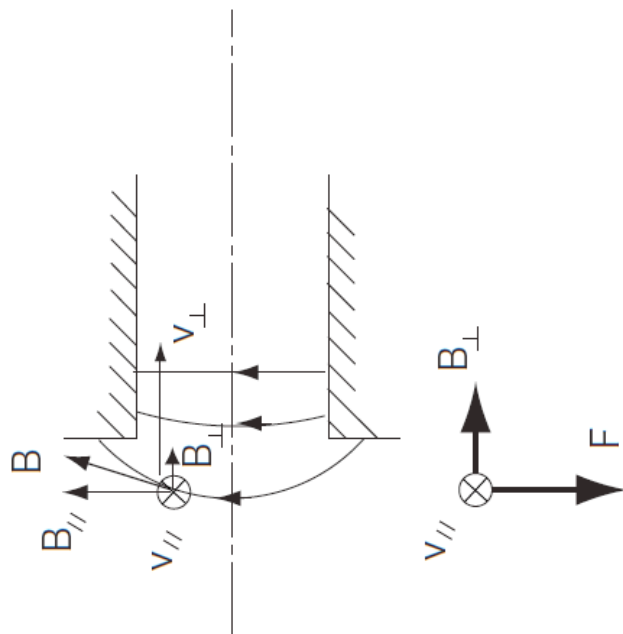
V_D が大きいほど N は小さくすみ $\Delta\phi$ も小さくなるが、

V_D に限界がある $\Rightarrow$ 加速可能エネルギー $\lesssim 10 \text{ MeV}$

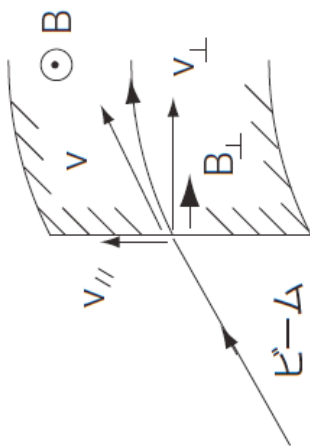
両立しない！



斜め入射による収束 (Edge focusing)

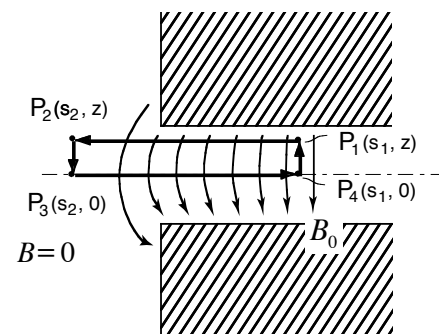
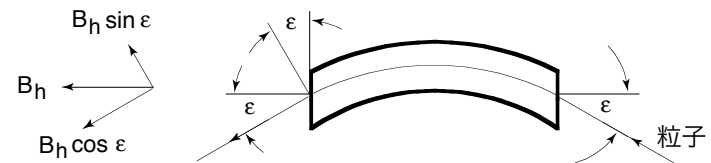


側面図



平面図

斜め入射による収束 (Edge focusing)



運動方程式

$$m\ddot{z} + qvB_h \sin \epsilon = 0$$

$$\frac{dp_z}{ds} = -qB_h \sin \epsilon$$

$$\Delta p_z = \int_{s_1}^{s_2} dp_z = -q \sin \epsilon \int_{s_1}^{s_2} B_h ds = -q \tan \epsilon \int_{s_1}^{s_2} B_h \cos \epsilon ds$$

$$\int \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{ストークスの定理})$$

$$\Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} B_h \cos \epsilon ds = - \int_{P_4}^{P_1} B_0 dz = B_0 z$$

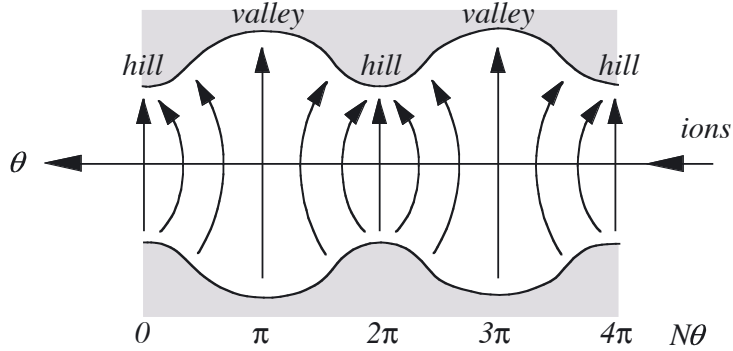
$$\Delta p_z = -qB_0 z \tan \epsilon$$

焦点距離 f :

$$\frac{1}{f} = - \frac{\Delta p_z}{p} \frac{1}{z} = \frac{qB_0}{mv} \tan \epsilon$$

ラジアルセクター型

方位角方向の磁場分布が $\cos\theta$ 型の場合



$$B_z = \bar{B}(1 + f \cos N\theta) \quad f: \text{モジュレーション}$$

N : セクター数

$$-qv\bar{B}f \cos N\theta = m\ddot{x}_f$$

$$x_f = \frac{fR}{N^2} \cos N\theta \quad (\text{平衡軌道: } r = R + x_f)$$

$$v_r = \omega \frac{dx_f}{d\theta} = -\frac{\omega f R}{N} \sin N\theta$$

$$B_\theta = \frac{\partial B_\theta}{\partial z} z = \frac{\partial B_z}{R \partial \theta} z = -z \frac{\bar{B} f N}{R} \sin N\theta \quad (\because \nabla \times \vec{B} = 0)$$

$$F_z = -qv_r B_\theta = -m\omega^2 f^2 z \sin^2 N\theta$$

方位角方向の磁場分布が $\cos\theta$ 型の場合 (続き)

$$\bar{F}_z = -m\omega^2 f^2 z \overline{\sin^2 N\theta} = -\frac{1}{2}m\omega^2 f^2 z \quad (\text{時間平均})$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \mu' \omega^2 z + \frac{1}{2} \omega^2 f^2 z = \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_z^2 z = 0$$

または

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + \left(\frac{1}{2}f^2 - \mu'\right)z = \frac{d^2 z}{d\theta^2} + \nu_z^2 z = 0$$

$$\therefore \quad \nu_z^2 = \frac{\omega_z^2}{\omega^2} = -\mu' + \frac{1}{2}f^2$$

$$\text{フラッター: } F^2 = \frac{(B - \bar{B})^2}{\bar{B}^2} = \frac{1}{2}f^2$$

等時性磁場 $\bar{B} = \gamma B_c$ ($B_c \equiv \omega m_0 / q$) の場合

$$\mu' = \frac{r}{\bar{B}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial r} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \beta^2 \gamma^2 \quad (r = \frac{\beta c}{\omega} \propto \beta)$$

収束条件

$$\frac{1}{2}f^2 > \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$$

$$\text{他方} \quad \nu_r^2 \approx 1 + \mu' = 1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2$$

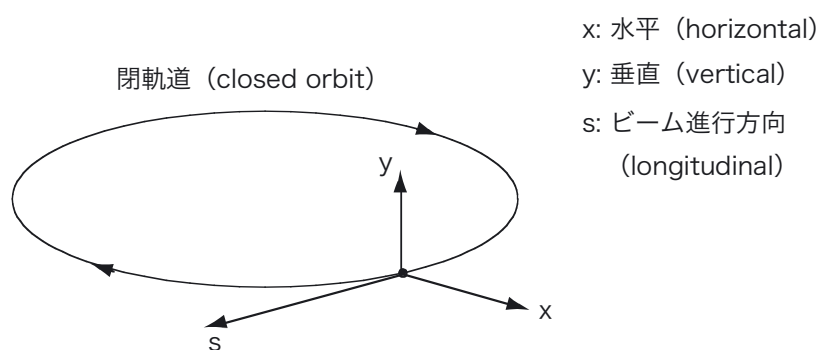
$$\nu_r \approx \gamma$$

横方向のビーム運動学の一般的取扱い (Transverse beam dynamics)

ベータatron振動と転送行列 (Betatron oscillation and Transfer matrix)

強収束 (Strong focusing) または AG 収束 (Alternating gradient focusing) の場合について議論

座標系の定義



粒子の運動・・・閉軌道のまわりの運動

基本式

$$p = qB\rho$$

$$p[\text{GeV}/c] = 0.3QB[T]\rho[m]$$

$$B\rho = 3.107\sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{A}{Q} [\text{Tm}] \quad B\rho : \text{磁気剛性} \\ (\text{Magnetic rigidity})$$

偏向 (二重極) 磁石中の運動方程式 (Bending magnet/Dipole magnet)

運動方程式

a) 一様磁場の場合

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \frac{v^2}{r} - qvB$$

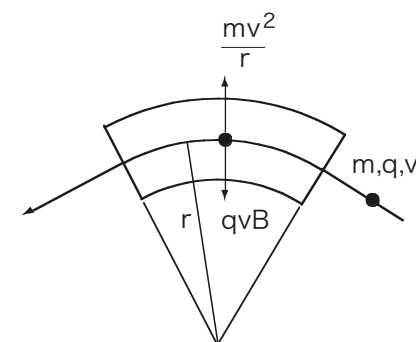
$$\downarrow \quad B\rho = \frac{mv}{q}, \quad s = vt$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{1}{r} - \frac{B}{B\rho}$$

$$\downarrow \quad r = \rho + x \quad (x \ll \rho)$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = 0 \quad (\text{x 方向})$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = 0 \quad (\text{y 方向})$$



b) 磁場が n 値をもつ場合

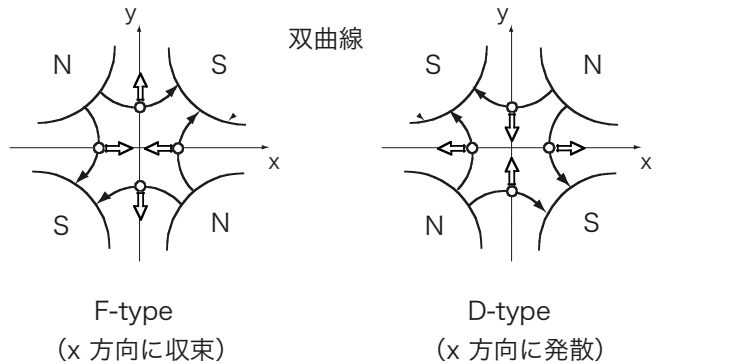
$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{(1-n)}{\rho^2} x = 0 \quad (\text{x 方向})$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{n}{\rho^2} y = 0 \quad (\text{y 方向})$$

$$n = -\frac{\rho}{B} \frac{\partial B_y}{\partial r} \bigg|_{r=\rho, y=0}$$

四重極磁石中の運動方程式

(Quadrupole magnet)



磁場

$$(B_x, B_y, B_z) = (ay, ax, 0)$$

$$a = \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=y=0} \quad a: \text{磁場勾配 (Field gradient)}$$

運動方程式 (x 方向)

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -qva_x \\ \frac{d^2 x}{ds^2} + \left(\frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) x &= 0 \end{aligned} \quad \leftarrow \quad \begin{aligned} F_x &= q(v_y B_z - v_z B_y) = -qva_x \\ F_y &= q(v_z B_x - v_x B_z) = qva_y \\ \frac{d^2 x}{ds^2} &= -\frac{q}{mv} \frac{ax}{v} \\ &= -\frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} x \end{aligned}$$

F-type に対する運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} + Kx &= 0 \\ \frac{d^2 y}{ds^2} - Ky &= 0 \\ K &= \frac{1}{B\rho} \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=y=0} \end{aligned}$$

x 方向が収束ならば y 方向は発散
x 方向が発散ならば y 方向は収束

同時に収束または発散することはない
(光学レンズと異なる点)

転送行列 (Transfer matrix)

位相空間での粒子の運動を行列で表わす

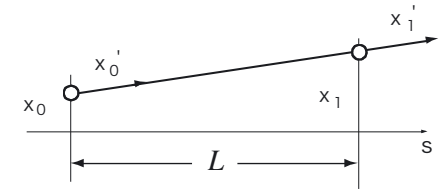
$$(x, x') : x' = dx/ds$$

自由空間 (Drift space)

$$x_1 = x_0 + Lx'_0$$

$$x'_1 = x'_0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$



四重極電磁石

F-type に対する解

$$\begin{aligned} x &= A \sin \sqrt{K}s + B \cos \sqrt{K}s \\ x' &= A \sqrt{K} \cos \sqrt{K}s - B \sqrt{K} \sin \sqrt{K}s \end{aligned} \quad \leftarrow \quad \frac{d^2 x}{ds^2} + Kx = 0$$

$$B = x_0, \quad A = x'_0 / \sqrt{K} \quad \leftarrow \quad (x, x') = (x_0, x'_0) \text{ at } s = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}s \\ -\sqrt{K} \sin \sqrt{K}s & \cos \sqrt{K}s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (\text{F-type})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh \sqrt{K}s \\ -\sqrt{K} \sinh \sqrt{K}s & \cosh \sqrt{K}s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (\text{D-type})$$

y 方向についても同様 (ただし、F、D が逆転)

薄肉レンズ近似

(Thin lens approximation)

四重極電磁石の転送行列で

$$k = Ks$$

$$Ks = \text{一定}$$

$$s \rightarrow 0$$

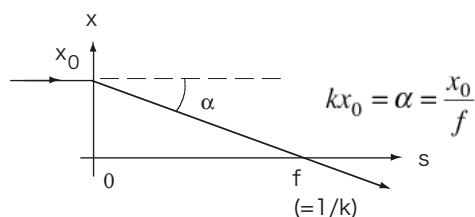
とすると

$$M_{QF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 \\ x_1' &= -kx_0 + x_0' \end{aligned}$$

収束

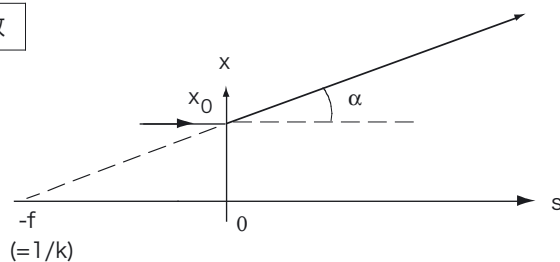


$$M_{QD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 \\ x_1' &= kx_0 + x_0' \end{aligned}$$

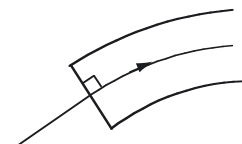
発散



転送行列 (続き)

偏向 (二重極) 電磁石

直角入出射の場合



水平方向 (x 方向)

運動方程式の解

$$\begin{aligned} x &= A \sin \frac{s}{\rho} + B \cos \frac{s}{\rho} \\ x' &= \frac{A}{\rho} \cos \frac{s}{\rho} - \frac{B}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} \end{aligned} \quad \leftarrow \quad \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = 0$$

$$B = x_0, \quad A = x_0' \rho \quad \leftarrow \quad (x, x') = (x_0, x_0') \text{ at } s = 0$$

$$M_B^x = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\rho} & \rho \sin \frac{s}{\rho} \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} & \cos \frac{s}{\rho} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \rho \sin \varphi \\ -\frac{1}{\rho} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \leftarrow \quad \varphi = s / \rho : \text{偏向角 (Bending angle)}$$

垂直方向 (y 方向)

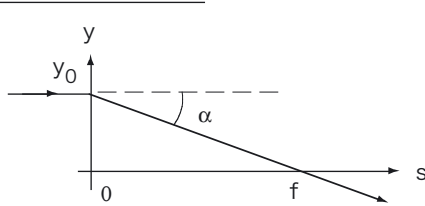
自由空間と同じ (自由空間長 = $\rho\varphi$)

$$M_B^y = \begin{pmatrix} 1 & \rho\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

偏向（二重極）電磁石（続き）

斜め入出射の場合

垂直方向（y 方向）

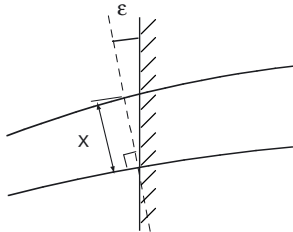


$$\alpha = \frac{y_0}{f}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{q\Delta B}{mv} \tan \varepsilon = \frac{\tan \varepsilon}{\rho} \quad (\Delta B = B_0)$$

$$M_e^y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} y_1 = y_0 \\ y_1' = -\frac{y_0}{f} = -\frac{\tan \varepsilon}{\rho} y_0 \end{matrix} \quad \boxed{\text{収束}}$$

水平方向（x 方向）



$\Delta s \approx x \tan \varepsilon$ の距離の間、磁場を感じない

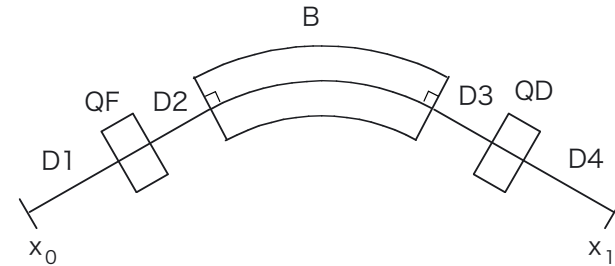
$$\Delta \theta = \frac{\Delta s}{\rho} \approx \frac{x}{\rho} \tan \varepsilon \quad \text{だけ中心軌道より曲げられない}$$

$$M_e^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} x_1 = x_0 \\ x_1' = \Delta \theta = \frac{\tan \varepsilon}{\rho} x_0 \end{matrix} \quad \boxed{\text{発散}}$$

合成の転送行列は M_e を M_B の右または左から掛けることによって得られる

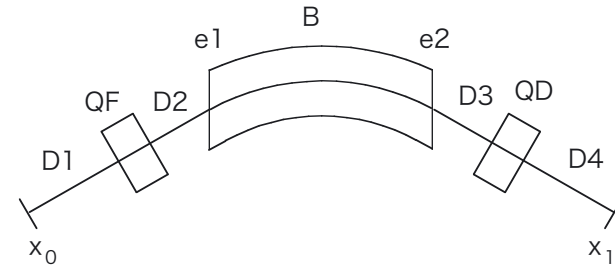
複合要素の転送行列

偏向磁石が直角入出射の場合



$$M_{0 \rightarrow 1} = M_{D4} \cdot M_{QD} \cdot M_{D3} \cdot M_B \cdot M_{D2} \cdot M_{QF} \cdot M_{D1}$$

偏向磁石が斜め入出射の場合



$$M_{0 \rightarrow 1} = M_{D4} \cdot M_{QD} \cdot M_{D3} \cdot M_{e2} \cdot M_B \cdot M_{e1} \cdot M_{D2} \cdot M_{QF} \cdot M_{D1}$$

ここまでの議論は、シンクロトロンやサイクロトロンだけではなく、ビーム輸送系にも適用できる

周期解と Twiss パラメータ

(Periodic solutions and Twiss parameters)

運動方程式

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + \left(\frac{1}{\rho(s)^2} + \tilde{K}(s) \right) x = 0 \\ \frac{d^2y}{ds^2} - \tilde{K}(s) y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rho(s) : \text{BM の曲率半径} \\ (\text{BM のないとき } 1/\rho = 0) \end{array}$$

簡単のために、 x 、 y をまとめて

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = 0 & : \text{ヒル (Hill) 方程式} \\ K(s+L) = K(s) & (L : \text{リングの周長}) \end{cases}$$

フロケー (Floquet) の定理より、ヒル方程式の一次独立な特殊解は

$$\begin{cases} x_1 = w(s)e^{i\psi(s)}, & x_2 = w(s)e^{-i\psi(s)} \\ w(s+L) = w(s) \end{cases}$$

この解をヒル方程式に代入して

$$\begin{cases} w'' - w\psi'^2 + Kw = 0 \\ 2w'\psi' + w\psi'' = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} w'' - \frac{1}{w^3} + Kw = 0 \\ \psi' = \frac{1}{w^2} \end{cases}$$

周期解と Twiss パラメータ (続き)

s_1 から s_2 への転送行列 $M(s_2 | s_1)$

$$\begin{pmatrix} x_1(s_2) & x_2(s_2) \\ x_1'(s_2) & x_2'(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2 | s_1) \begin{pmatrix} x_1(s_1) & x_2(s_1) \\ x_1'(s_1) & x_2'(s_1) \end{pmatrix}$$

$M(s_2 | s_1)$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} x_1(s_2) & x_2(s_2) \\ x_1'(s_2) & x_2'(s_2) \end{pmatrix} \frac{1}{x_1(s_1)x_2'(s_1) - x_2(s_1)x_1'(s_1)} \begin{pmatrix} x_2'(s_1) & -x_2(s_1) \\ -x_1'(s_1) & x_1(s_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{w_2}{w_1} \cos \psi_{12} - w_2 w_1' \sin \psi_{12} & w_1 w_2 \sin \psi_{12} \\ -\frac{1 + w_1 w_1' w_2 w_2'}{w_1 w_2} \sin \psi_{12} - \left(\frac{w_1'}{w_2} - \frac{w_2'}{w_1} \right) \cos \psi_{12} & \frac{w_1}{w_2} \cos \psi_{12} + w_1 w_2' \sin \psi_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$w_1 \equiv w(s_1), \quad w_2 \equiv w(s_2)$$

$$\psi_{12} \equiv \psi(s_2) - \psi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{w^2(s)} ds$$

周期解と Twiss パラメータ（続き）

とくに、 $s_2 = s_1 + L$, $s_1 = s$ のとき、 $w(s)$ の周期性を用いて

$$M(s+L|s) \equiv M(s) = \begin{pmatrix} \cos \psi_L - ww' \sin \psi_L & w^2 \sin \psi_L \\ -\frac{1+w'^2}{w^2} \sin \psi_L & \cos \psi_L + ww' \sin \psi_L \end{pmatrix}$$

$$\psi_L \equiv \psi(s+L) - \psi(s)$$

今、

$$\mu = \psi_L = \int_s^{s+L} \frac{ds'}{\beta(s')} \quad : \quad \text{位相の進み (Phase advance)}$$

$$\beta = w^2$$

$$\alpha = -ww' = -\frac{\beta'}{2}$$

$$\gamma = \frac{1+w'^2}{w^2} = \frac{1+\alpha^2}{\beta}$$

$$\mu, \alpha, \beta, \gamma \quad : \quad s \text{ の関数}$$

とおくと、一周期の転送行列 $M(s)$ は

$$M(s) = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}$$

$$\alpha, \beta, \gamma \quad : \quad \text{Twiss パラメータ (Twiss 関数)}$$

周期解と Twiss パラメータ（続き）

結局、ヒル方程式を満たす特殊解 x_1, x_2 は

$$\begin{cases} x_1(s) = \sqrt{\beta(s)} \exp \left[i \int \frac{ds}{\beta(s)} \right] \\ x_2(s) = \sqrt{\beta(s)} \exp \left[-i \int \frac{ds}{\beta(s)} \right] \end{cases}$$

したがって、一般解は

$$x(s) = a \sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) + \delta] \quad : \quad \text{振動解}$$

$$\psi(s) = \int \frac{ds}{\beta(s)}$$

ベータトロン振動

なお、転送行列 $M(s_2 | s_1)$ を Twiss パラメータで表わすと

$$M(s_2 | s_1)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi_{12} + \alpha_1 \sin \psi_{12}) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \psi_{12} \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} [(1 + \alpha_1 \alpha_2) \sin \psi_{12} + (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \psi_{12}] & \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi_{12} - \alpha_1 \sin \psi_{12}) \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 \equiv \beta(s_1), \beta_2 \equiv \beta(s_2) \text{ 等}$$

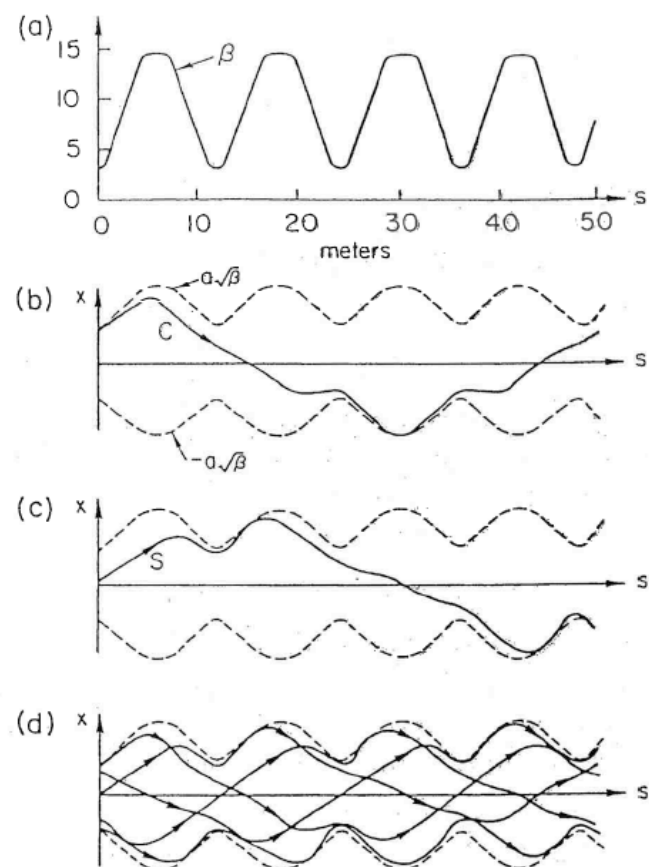


FIG. 12--(a) Betatron function. (b) Cosine-like trajectory for $s=0$.
 (c) Sine-like trajectory for $s=0$. (d) One trajectory on
 several successive revolutions.

ベータトロン振動の安定性 (Stability of betatron oscillation)

安定条件

N ターン後の粒子の位相空間上での位置 X_N

$$X_N = M^N X_0$$

M : 1 周期分の転送行列

M の固有値を λ_1, λ_2 、固有ベクトルを $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ とすると

$$X_0 = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$$

$$X_N = c_1 \lambda_1^N \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^N \vec{v}_2$$

したがって、 X_N が有限の値にとどまる条件

$$|\lambda| \leq 1 \quad (\lambda = \lambda_1, \lambda_2)$$

固有値は

$$\lambda^2 - \lambda(m_{11} + m_{22}) + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos \mu + 1 = 0$$

$$\lambda = \cos \mu \pm i \sin \mu = e^{\pm i\mu}$$

$$\leftarrow \det M = 1$$

次ページ

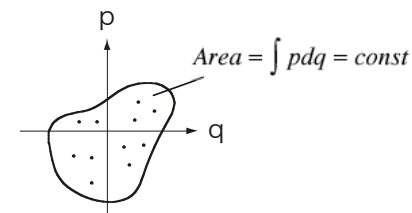
安定なベータトロン振動を得る条件

$$|Tr(M)| = |m_{11} + m_{22}| = |2 \cos \mu| \leq 2$$

$$\longleftrightarrow \mu : \text{実数}$$

$$|\lambda| = 1$$

リューヴィルの定理 (Liouville's theorem)



「保存力の働く系では位相空間上の粒子の密度（位相体積または位相面積）は不変」

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

にしたがって運動する場合もリューヴィルの定理が成り立つ

① の面積 W

$$W = x_1 x_2' - x_1' x_2 \quad (\text{ロンスキアン、Wronskian})$$

$$\frac{dW}{ds} = \cancel{x_1' x_2'} - \cancel{x_1' x_2'} + x_1 x_2'' - x_1'' x_2$$

$$= x_1 (-K(s)x_2) - (-K(s)x_1)x_2$$

$$= 0$$

$\longrightarrow$ W : 不変

したがって、① の面積 $W_1 =$ ② の面積 W_2

$$W_2 = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2' - \tilde{x}_1' \tilde{x}_2$$

$$= \det M (x_1 x_2' - x_1' x_2)$$

$$= \det M \cdot W_1$$

$$\longrightarrow \det M = 1$$

不変量 (Invariant)

Twiss パラメータと位相楕円 (Phase ellipse)

位相空間上での粒子の位置

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos(\psi(s) + \delta)$$

$$\begin{aligned} x'(s) &= -a\frac{1}{\sqrt{\beta(s)}}[\alpha(s)\cos(\psi(s) + \delta) + \sin(\psi(s) + \delta)] \\ &= -a\sqrt{\gamma(s)}\sin(\psi(s) + \delta') \quad (\because \gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta}) \end{aligned}$$

Courant-Snyder 不変量

上式より

$$\frac{x^2}{\beta(s)} + \left(\frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}}x + \sqrt{\beta(s)}x' \right)^2 = a^2 = \text{const}$$

$$\gamma(s)x^2(s) + 2\alpha(s)x(s)x'(s) + \beta(s)x'^2(s) = a^2 = \text{const}$$

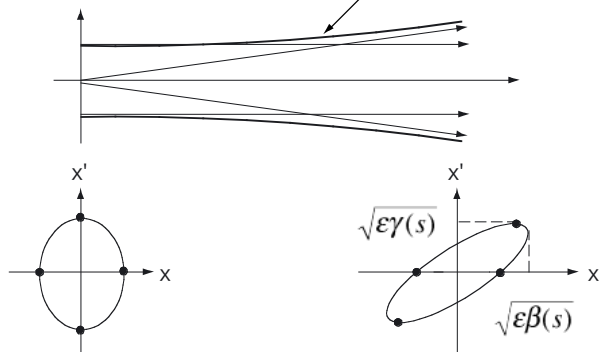
$$S = a^2\pi = \varepsilon\pi$$

ε : エミッタンス (Emittance)

$$x(s) = \sqrt{\varepsilon\beta(s)}\cos(\psi(s) + \delta)$$

$$x'(s) = -\sqrt{\varepsilon\gamma(s)}\sin(\psi(s) + \delta')$$

包絡線 (Envelope) $\sqrt{\varepsilon\beta(s)}$



周期解と Twiss パラメータ (続き)

例：平均の β 関数

均一勾配 (Constant gradient) のマシンでは

$$2\pi\nu = \oint \frac{ds}{\beta} = \frac{2\pi R}{\bar{\beta}}$$



$$\bar{\beta} = \frac{R}{\nu}$$

強収束のマシンに対しても、およその目安を与える

周期解と Twiss パラメータ (続き)

N 個のセルからなるリングの Twiss パラメータ

1つのセルの転送行列: M_C
 リング全体の転送行列: M_T



$$M_T = M_C^N$$

$$M_C = \begin{pmatrix} \cos \mu_C + \alpha \sin \mu_C & \beta \sin \mu_C \\ -\gamma \sin \mu_C & \cos \mu_C - \alpha \sin \mu_C \end{pmatrix}$$

$$M_C = I \cos \mu_C + J \sin \mu_C, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$



$$M_T = \begin{pmatrix} \cos N\mu_C + \alpha \sin N\mu_C & \beta \sin N\mu_C \\ -\gamma \sin N\mu_C & \cos N\mu_C - \alpha \sin N\mu_C \end{pmatrix}$$

M_C に関して β, α, μ を求めれば全周について情報が得られる

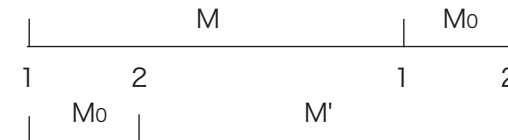
→ 直接、全周の転送行列について計算する必要がない

$$\text{リングのベータatron振動数: } \nu = \frac{N\mu_C}{2\pi}$$

周期解と Twiss パラメータ (続き)

Twiss 関数の変換

リング上の2点1、2およびそれらの転送行列



M: 点1での1周あたりの転送行列

M': 点2での1周あたりの転送行列

M₀: 点1から点2への転送行列

$$M_0 M = M' M_0$$

$$M' = M_0 M M_0^{-1}$$

M, M' は同じ固有値をもつ



μ は場所によらない

$$\therefore \lambda = e^{\pm i\mu}$$

$$\begin{aligned} \det(M' - \lambda I) &= \det(M_0 M M_0^{-1} - \lambda M_0 I M_0^{-1}) \\ &= \det(M_0 (M - \lambda I) M_0^{-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

変換関係

$$M_0 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} (I \cos \mu + J \sin \mu) \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\gamma_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{21}m_{11} & 1 + 2m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21} & -2m_{22}m_{21} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

周期解と Twiss パラメータ (続き)

例：自由空間のときの Twiss パラメータの振舞い

自由空間の転送行列 M_0

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

l : 点 1 と点 2 の間の長さ

点 1 と点 2 の Twiss パラメータの関係

$$\beta_2 = \beta_1 - 2\alpha_1 l + \gamma_1 l^2$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \gamma_1 l$$

$$\gamma_2 = \gamma_1$$

$l \rightarrow s$ として、 s を点 1 からの距離とすると

$$\beta(s) = \beta_1 - 2\alpha_1 s + \gamma_1 s^2$$



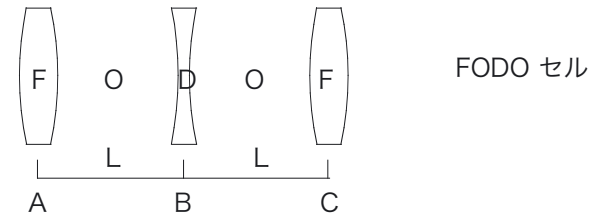
$\beta(s)$ は放物線

周期解と Twiss パラメータ (続き)

例：FODO セルでの Twiss パラメータの振舞い (Cell)

電磁石の配列：ラティス (Lattice)

基本構成要素：セル (Cell)



O : 自由空間または偏向電磁石 $\longrightarrow$ いずれにしても自由空間

A から C への転送行列 M (thin lens 近似)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{k^2 L^2}{2} & 2L(1 + \frac{kL}{2}) \\ -\frac{k^2 L}{2}(1 - \frac{kL}{2}) & 1 - \frac{k^2 L^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha \sin\mu & \beta \sin\mu \\ -\gamma \sin\mu & \cos\mu - \alpha \sin\mu \end{pmatrix}$$

FODO セル：周期的 $\longrightarrow$ Twiss パラメータが求められる

例：FODO セルでの Twiss パラメータの振舞い（続き）

点 A での Twiss パラメータ

$$\beta_F = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{1+kL/2}{1-kL/2}} = \frac{2L}{\sin \mu} (1 + \sin \frac{\mu}{2})$$

$$\alpha_F = 0$$

$$\cos \mu = 1 - \frac{k^2 L^2}{2} \rightarrow \sin \frac{\mu}{2} = \frac{kL}{2}$$

点 B での Twiss パラメータ (DOFO セル)

$$\beta_D = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{1-kL/2}{1+kL/2}} = \frac{2L}{\sin \mu} (1 - \sin \frac{\mu}{2})$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{k^2 L^2}{2} & 2L(1 - \frac{kL}{2}) \\ -\frac{k^2 L}{2}(1 + \frac{kL}{2}) & 1 - \frac{k^2 L^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_D = 0$$

$$\cos \mu = 1 - \frac{k^2 L^2}{2}$$

FODO のときと同じ値
※ 場所によらない

例：FODO セルでの Twiss パラメータの振舞い（続き）

以上より

$$0 < \mu < \pi$$

また

$$\beta_F > \beta_D \rightarrow$$

QF のところでビームサイズが大
(ビームサイズ $\propto \sqrt{\epsilon \beta}$)

点 A と点 B の間の β 関数

$$\beta(s) = \beta_1 - 2\alpha_1 s + \gamma_1 s^2$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k/2 & 1 & 0 \\ k^2/4 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_F \\ \alpha_F \\ \gamma_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_F \\ k\beta_F/2 \\ k^2\beta_F/4 + k\alpha_F + \gamma_F \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

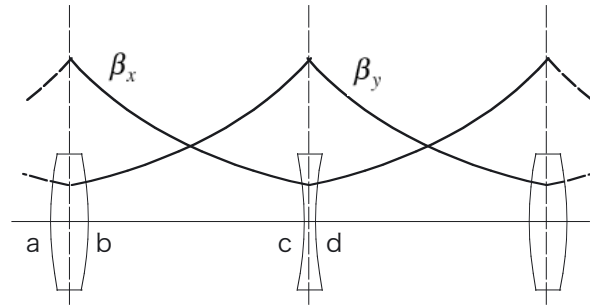
$$\left. \frac{d\beta}{ds} \right|_1 = -2\alpha_1 < 0$$

$$\alpha_D = 0$$

点 A から点 B までは
単調減少 (の放物線)

例：FODO セルでの Twiss パラメータの振舞い（続き）

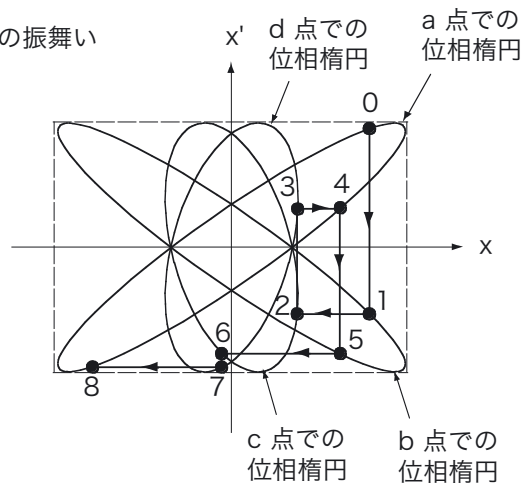
β 関数の形



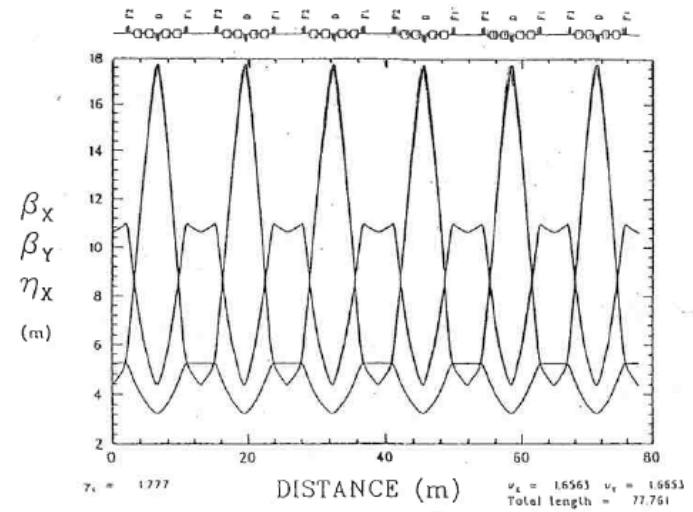
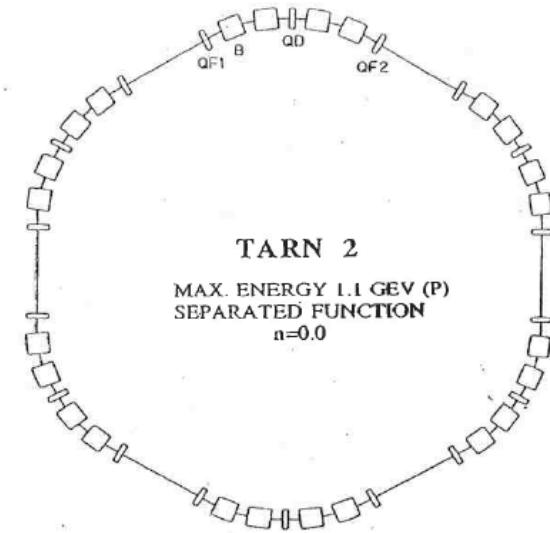
粒子1個1個の運動は F、D、F の間では直線的
個々の粒子の作る軌道の包絡線が放物線を描く

β 関数： 位相楕円の運動を記述する関数

1 個の粒子の振舞い



Twiss 関数の例（東大 CNS の TARN-II）



周期解と Twiss パラメータ (続き)

FODO セルの安定領域 (ネクタイ図)

(Necktie diagram)

QF と QD の収束力は一般に異なる $\rightarrow$ それぞれ k_F, k_D とする



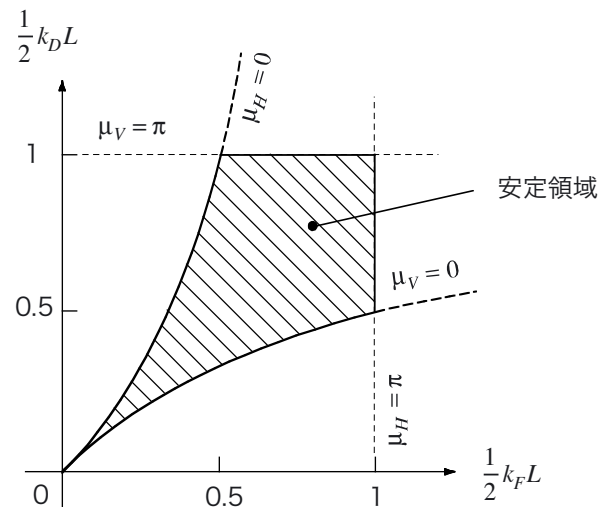
$$\begin{cases} \cos \mu_H = 1 + (k_D - k_F)L - \frac{1}{2}k_D k_F L^2 \\ \cos \mu_V = 1 - (k_D - k_F)L - \frac{1}{2}k_D k_F L^2 \end{cases}$$

μ_H : 水平方向の位相進み

μ_V : 垂直方向の位相進み

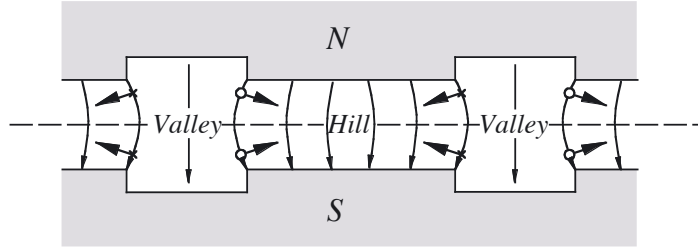
安定条件
$$\begin{cases} -1 \leq \cos \mu_H \leq 1 \\ -1 \leq \cos \mu_V \leq 1 \end{cases}$$

ネクタイ図

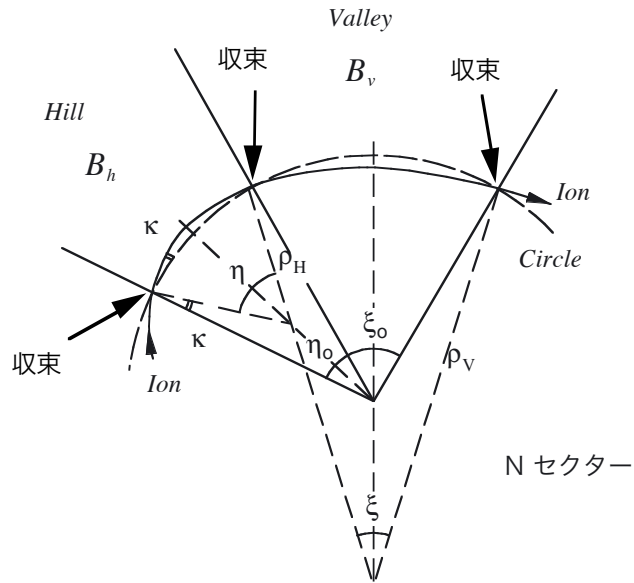


ラジアルセクター型 AVF サイクロトロン

方位角方向の磁場分布が階段関数型の場合



ハードエッジ磁場



ラジアルセクター型 (続き)

κ の導出

粒子が1周するのに要する時間 τ

$$\tau = \frac{N\eta\rho_h}{v} + \frac{N\xi\rho_v}{v}$$

$$mv = qB\rho \text{ および等時性}$$

$$\frac{N\eta}{B_h} + \frac{N\xi}{B_v} = \frac{q\tau}{m} = \frac{2\pi}{\bar{B}}$$

$$\xi_0 + \eta_0 = \xi + \eta = \frac{2\pi}{N}$$

$$\eta \left(\frac{1}{B_h} - \frac{1}{B_v} \right) = \frac{2\pi}{N} \left(\frac{1}{\bar{B}} - \frac{1}{B_v} \right)$$

$$\eta = \frac{2\pi}{N} \frac{\bar{B} - B_v}{\bar{B}} \frac{B_h}{B_h - B_v}$$

ここで、

$$\eta_0 \equiv \frac{\rho_h}{\rho_0} \eta = \frac{\bar{B}}{B_h} \eta = \frac{2\pi}{N} \frac{\bar{B} - B_v}{B_h - B_v}$$

$$\eta_0 \rho_0 \equiv \eta \rho_h$$

したがって、

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2}(\eta - \eta_0) \\ &= \frac{\pi}{N} \frac{\bar{B} - B_v}{B_h - B_v} \left(\frac{B_h}{\bar{B}} - 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{N} \frac{(B_h - \bar{B})(\bar{B} - B_v)}{(B_h - B_v)\bar{B}} \end{aligned}$$

ラジアルセクター型 (続き)

転送行列を用いてベータatron振動数を求める方法

幾何学、 $\omega = \frac{q}{m} B$ 、 $mv = qB\rho$ より

$$\kappa = \frac{\pi (B_h - \bar{B})(\bar{B} - B_v)}{N (B_h - B_v)\bar{B}} \quad (\bar{B} : \text{平均磁場})$$

Edge-focusing (斜め入出射による収束)

$$\frac{1}{f} = \frac{q\Delta B}{mv} \tan \kappa = G \tan \kappa$$

転送行列 M (FOFO): $1/N$ 周期分

$$M = M_0' M_F M_0 M_F$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & L_v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -G \tan \kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L_h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -G \tan \kappa & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos \frac{2\pi\nu}{N} = \cos \mu = \frac{1}{2} (M_{11} + M_{22})$$

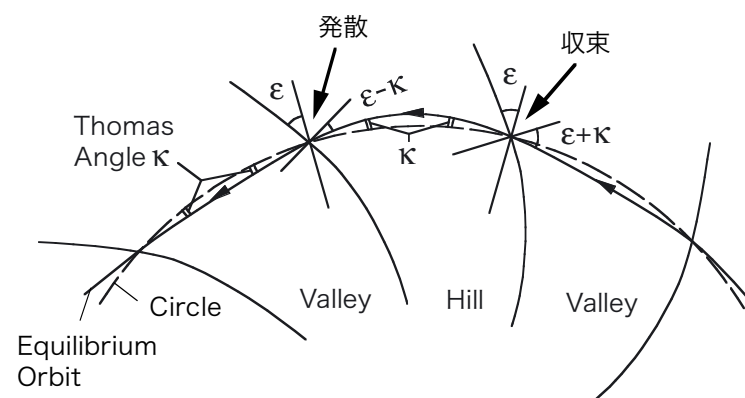
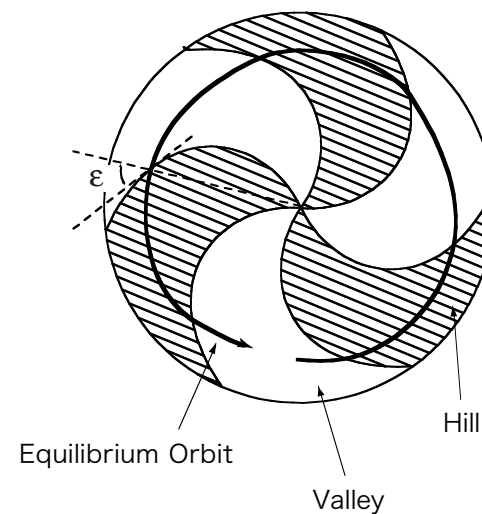
$$\sin \frac{\mu}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2GL\kappa}$$

$$v_z^2 = -\beta^2 \gamma^2 + \frac{(B_h - \bar{B})(\bar{B} - B_v)}{\bar{B}^2} = -\beta^2 \gamma^2 + F^2$$

等時性による発散項

$$\text{フラッター: } F^2 \equiv \frac{(B - \bar{B})^2}{\bar{B}^2} = \frac{(B_h - \bar{B})(\bar{B} - B_v)}{\bar{B}^2}$$

スパイラルセクター型 AVF サイクロトロン



スパイラルセクター型 (続き)

$$\kappa = \frac{\pi}{N} \frac{(B_h - \bar{B})(\bar{B} - B_v)}{(B_h - B_v)\bar{B}} \quad : \text{ラジアルセクター型の場合と同じ値}$$

Edge-focusing/defocusing (斜め入出射による収束/発散)

$$\frac{1}{f} = \mp \frac{q\Delta B}{mv} \tan(\epsilon \pm \kappa) = \mp G \tan(\epsilon \pm \kappa)$$

転送行列 (Transfer matrix) M (FODO)

$$M = M_0' M_D M_0 M_F$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & L_v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G \tan(\epsilon - \kappa) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L_h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -G \tan(\epsilon + \kappa) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sin \frac{\mu}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2GL\kappa(1 + \tan^2 \epsilon) + G^2 L_h L_v \tan^2 \epsilon}$$

$$v_z^2 = -\beta^2 \gamma^2 + \frac{(B_h - \bar{B})(\bar{B} - B_v)}{\bar{B}^2} (1 + 2 \tan^2 \epsilon)$$

$$v_z^2 = -\beta^2 \gamma^2 + F^2 (1 + 2 \tan^2 \epsilon)$$

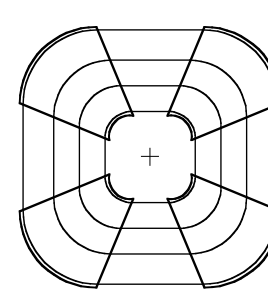
例えば $\epsilon \approx 50^\circ \rightarrow 1 + 2 \tan^2 \epsilon \approx 4$

強収束を用いたサイクロトロン (II)

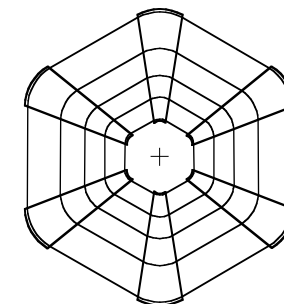
リングサイクロトロン

分離セクター型サイクロトロン

M. M. Gordon, Annals of Physics 50, 571 (1968)



4セクター



6セクター

PSI : 陽子 590 MeV

RCNP : 陽子 400 MeV、軽イオン (K < 400)

理研 : 陽子 210 MeV、重イオン (K = 2,600)

$$E (\text{MeV/核子}) = K \left(\frac{Q}{A} \right)^2$$

Q : 電荷数

A : 質量数

運動方程式を解くことによって Twiss パラメータを求める方法

Figure 1 is a phase diagram in the (y_1, y_2) plane. The horizontal axis is y_1 and the vertical axis is y_2 . A dashed curve represents the boundary of the region $N=4$. A solid curve, labeled "平衡軌道" (Equilibrium Orbit), represents the trajectory of the system. Arrows indicate the direction of flow. The trajectory starts at $(0,1)$ and ends at $(1,0)$. The region $N=4$ is labeled inside the dashed curve. The trajectory is labeled with (y_1, y_1') and (y_2, y_2') at its endpoints.

数値計算で求める

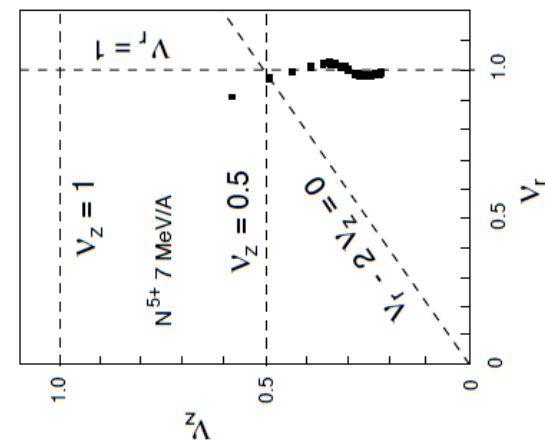
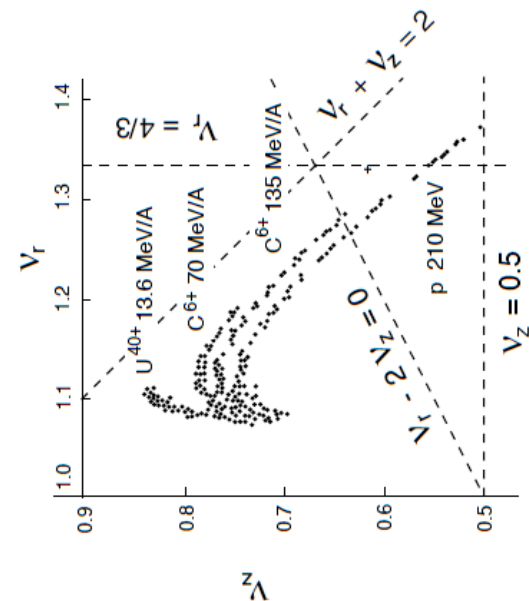
→ Twiss パラメータ

$$\cos \frac{2\pi v_y}{N} = \frac{1}{2} Tr(M)$$

Twiss パラメータの変換式を用いて点 s での Twiss パラメータを求める

32

ベータタロン振動数の振舞いの例

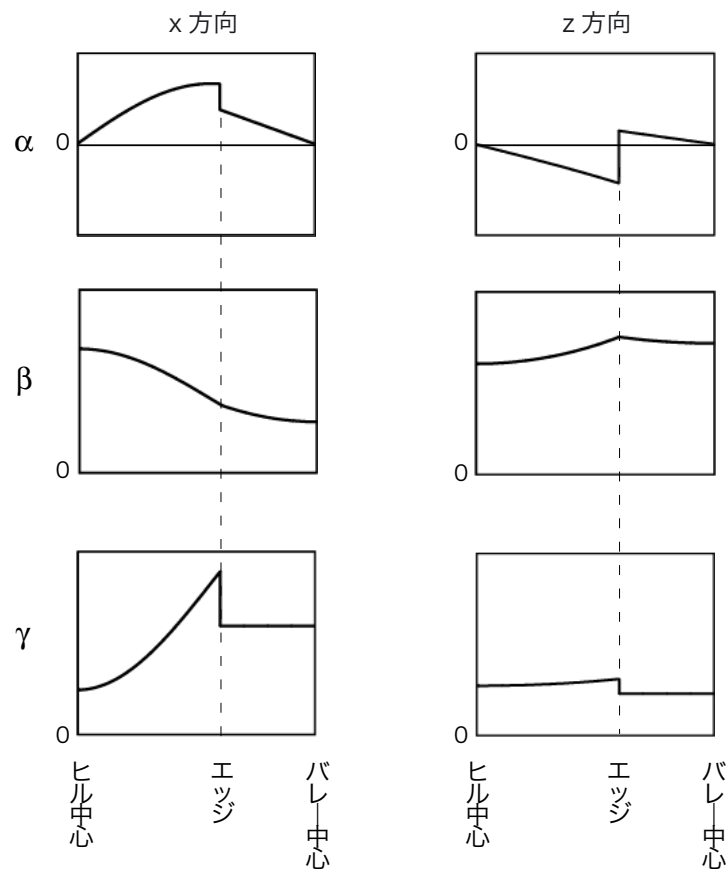


理研リングサイクロトロン

理研 AVF サイクロトロン

リングサイクロトロン（続き）

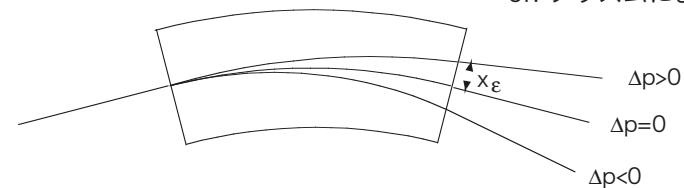
リングサイクロトロン中での Twiss パラメータの振舞い



運動量の広がりによる横方向運動への影響

分散関数（Dispersion function）

cf. プリズムによる光の分散



分散関数（または単に分散）

$$x_\epsilon = \eta \frac{\Delta p}{p} \quad (x_\epsilon : \Delta p \text{ だけずれた粒子の閉軌道に対するずれ})$$

BM について考える（ $\because$ 分散は BM によって生じる）

BM 中の運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= \frac{1}{r} - \frac{qB}{p} \\ &= -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{qB}{p} \end{aligned} \quad \frac{qB}{p} = \frac{qB}{p_0(1+\frac{\Delta p}{p})} \approx \frac{qB}{p_0} \left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right)$$

$$\therefore \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p}$$

特別解

$$x = \rho \frac{\Delta p}{p}$$

一般解

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} + \rho \frac{\Delta p}{p} \\ x_1' &= -\frac{A}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \frac{B}{\rho} \cos \frac{s}{\rho} \end{aligned}$$

分散関数 (Dispersion function) (続き)

初期条件を満たす一般解

$$x_1 = x_0 \cos \frac{s}{\rho} + x_0' \rho \sin \frac{s}{\rho} + \rho(1 - \cos \frac{s}{\rho}) \frac{\Delta p}{p}$$

$$x_1' = -\frac{x_0}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + x_0' \cos \frac{s}{\rho} + \sin \frac{s}{\rho} \frac{\Delta p}{p}$$

転送行列

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \frac{\Delta p}{p_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \frac{\Delta p}{p_0} \end{pmatrix}$$

分散関数

$$x = \eta \frac{\Delta p}{p}, \quad x' = \eta' \frac{\Delta p}{p}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_0' \\ 1 \end{pmatrix}$$

分散関数の変換は粒子の転送行列と同じもので行われる

とくに、 $\eta_0 = 0, \eta_0' = 0$ のとき $\eta_1 = \rho(1 - \cos \theta)$

例：FODO セルでの分散関数の振舞い

転送行列と周期性

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \quad \begin{aligned} \eta(s+L) &= \eta(s) \\ \eta'(s+L) &= \eta'(s) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1 - \cos \mu)} \begin{pmatrix} m_{13} + m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13} \\ m_{23} + m_{21}m_{13} - m_{11}m_{23} \end{pmatrix}$$

Thin lens 近似

FODO セルの転送行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L & \frac{L\theta}{2} \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L & \frac{L\theta}{2} \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & L & \frac{L\theta}{2} \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

自由空間 偏向磁石 自由空間

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{k^2 L^2}{2} & 2L(1 + \frac{kL}{2}) & 2L\theta(1 + \frac{kL}{4}) \\ -\frac{k^2 L}{2}(1 - \frac{kL}{2}) & 1 - \frac{k^2 L^2}{2} & 2\theta(1 - \frac{kL}{4} - \frac{k^2 L^2}{8}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例：FODO セルでの分散関数の振舞い（続き）

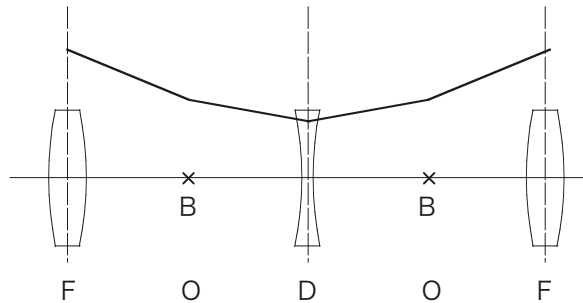
QF の中心での分散

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}_F = \frac{L\theta(1 + \frac{1}{2}\sin\frac{\mu}{2})}{\sin^2\frac{\mu}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longleftarrow \quad \frac{kL}{2} = \sin\frac{\mu}{2}$$

QD の中心での分散

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}_D = \frac{L\theta(1 - \frac{1}{2}\sin\frac{\mu}{2})}{\sin^2\frac{\mu}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

分散関数の形



- η は QF のところの方が QD のところより大きい
- η は $L\theta$ に比例する
- ➡ セルの長さが短く偏向角が小さいほど η は小さい

運動量が Δp だけずれた粒子群は、 $x = \eta \frac{\Delta p}{p}$ で与えられる
新たな閉軌道のまわりをベータトロン振動する

運動量の広がりによる横方向運動への影響（続き）

平均の η 関数

均一勾配（Constant gradient）のマシンでは

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left(\frac{v}{R}\right)^2 x = \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p}$$

$$x = \frac{R}{v^2} \frac{\Delta p}{p} \quad : \quad \Delta p \text{ だけずれた粒子の平衡軌道}$$

$$\eta = \frac{R}{v^2}$$

注）一様磁場の場合 $\eta = R$

強収束のマシンに対しても、かなり良い近似を与える

ビームサイズ

ベータトロン振動によるビームサイズ

$$\sigma_\beta = \sqrt{\epsilon\beta}$$

運動量広がりによるビームサイズ

$$\sigma_p = \eta \frac{\Delta p}{p}$$

全体のビームサイズ

$$\sigma = \sqrt{\sigma_\beta^2 + \sigma_p^2} = \sqrt{\left(\eta \frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \epsilon\beta}$$

Momentum compaction factor

同期粒子と異なる運動量をもった粒子の閉軌道の周長は同期粒子の閉軌道の周長と異なる

Momentum compaction factor α

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha \frac{\Delta p}{p}$$

周長

$$\begin{aligned} C + \Delta C &= \oint (\rho + x) d\theta \\ &= \oint ds + \oint \frac{x}{\rho} ds \\ &= C + \oint \frac{x}{\rho} ds \end{aligned}$$

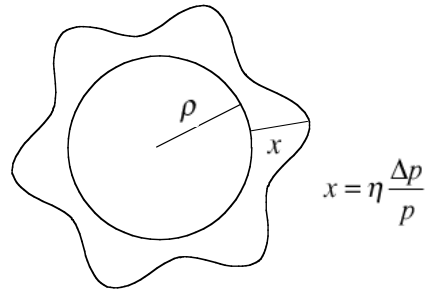
$$\therefore \frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{C} \oint \frac{x}{\rho} ds$$

したがって

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{(\Delta p / p)} \frac{\Delta C}{C} \\ &= \frac{1}{C} \oint \frac{\eta}{\rho} ds \end{aligned}$$

均一勾配 (Constant gradient) のマシンでは

$$\alpha = \frac{1}{v^2}$$



チューンとチューンシフト (Tune shift)

チューンの定義

$$\nu = \frac{1 \text{ 周当りの phase advance}}{2\pi}$$

調和振動子のバネの力を変えると振動の周波数が出る

↔ 収束力を変えるとベータatron振動数が出る

リングに小さな収束力がある場合の転送行列

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mu_0 + \alpha_0 \sin \mu_0 & \beta_0 \sin \mu_0 \\ -\gamma_0 \sin \mu_0 & \cos \mu_0 - \alpha_0 \sin \mu_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \mu_0 + \alpha_0 \sin \mu_0 & \beta_0 \sin \mu_0 \\ -k(\cos \mu_0 + \alpha_0 \sin \mu_0) - \gamma_0 \sin \mu_0 & \cos \mu_0 - \alpha_0 \sin \mu_0 - k\beta_0 \sin \mu_0 \end{pmatrix} \\ &\therefore \cos \mu = \cos \mu_0 - \frac{k\beta_0}{2} \sin \mu_0 \end{aligned}$$

今 $\mu - \mu_0 = \Delta\mu \ll 1$ とすると

$$\Delta\mu = \frac{1}{2} k\beta_0$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} k\beta_0$$

← チューンシフト

一般に

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \int \Delta K \beta(s) ds \quad (k = \Delta K \cdot l)$$

運動量広がりによるチューンシフト

四重極磁石の収束力が運動量のずれによって異なるために生じる

収束力の運動量依存性

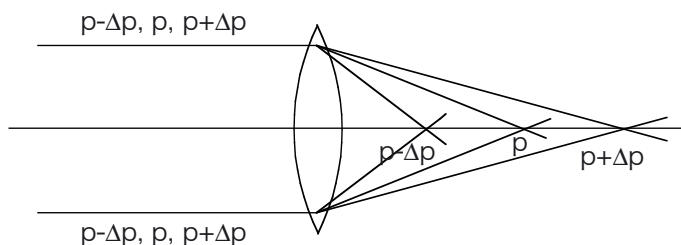
$$\begin{aligned} \frac{K(s)}{1 + \frac{\Delta p}{p}} &\cong K(s) - K(s) \frac{\Delta p}{p} \\ \Delta K &= -K(s) \frac{\Delta p}{p} \end{aligned} \quad \leftarrow \quad \begin{aligned} K &= \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=y=0} \\ &= \frac{q}{p} \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=y=0} \\ &= \frac{q}{p_0(1 + \frac{\Delta p}{p})} \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=y=0} \end{aligned}$$

チューンシフト

$$\begin{aligned} \Delta \nu &= -\frac{1}{4\pi} \int \Delta K \beta(s) ds \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int K(s) \frac{\Delta p}{p} \beta(s) ds \end{aligned}$$

クロマティシティー (Chromaticity、色収差)

$$\begin{aligned} \Delta \nu &= \xi \frac{\Delta p}{p} \\ \xi &\equiv -\frac{1}{4\pi} \int K(s) \beta(s) ds \end{aligned}$$



クロマティシティーの抑制

共鳴の問題 & β 関数がゆがむ $\rightarrow$ クロマティシティーを抑制する必要あり $\rightarrow$ 六重極磁石を用いる

六重極磁石の磁場

$$\begin{aligned} B_x &= 2axy \\ B_y &= a(x^2 - y^2) \end{aligned} \quad a = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \Big|_{x=0}$$

運動方程式 (六重極磁石中)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= -\lambda(x^2 - y^2) \\ \frac{d^2 y}{ds^2} &= 2\lambda xy \end{aligned} \quad \lambda = \frac{1}{2B\rho} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \Big|_{x=0}$$

この六重極磁石を分散のある場所 $((x, y) = (\eta \Delta p / p + x_\beta, y_\beta))$ に置いて x_β, y_β の一次までをとると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_\beta}{ds^2} &= -2\lambda \eta \frac{\Delta p}{p} x_\beta \\ \frac{d^2 y_\beta}{ds^2} &= 2\lambda \eta \frac{\Delta p}{p} y_\beta \end{aligned}$$

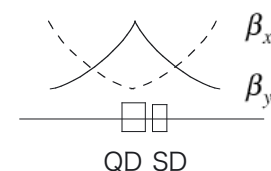
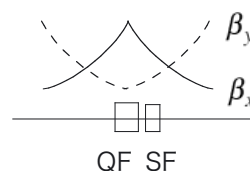
$$\begin{aligned} x_\beta = y_\beta = 0 \quad (x = \eta \Delta p / p) \text{ のとき} \\ \frac{d^2 \eta \frac{\Delta p}{p}}{ds^2} = -\lambda \eta^2 \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2 \end{aligned}$$

運動量広がり に比例した収束力

クロマティシティー

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{1}{4\pi} \int (2\lambda \eta(s) - K(s)) \beta_x(s) ds \\ \xi_y &= \frac{1}{4\pi} \int (K(s) - 2\lambda \eta(s)) \beta_y(s) ds \end{aligned}$$

QF の近くに SF ($\lambda > 0$)、QD の近くに SD ($\lambda < 0$) を置いて ξ をゼロにする



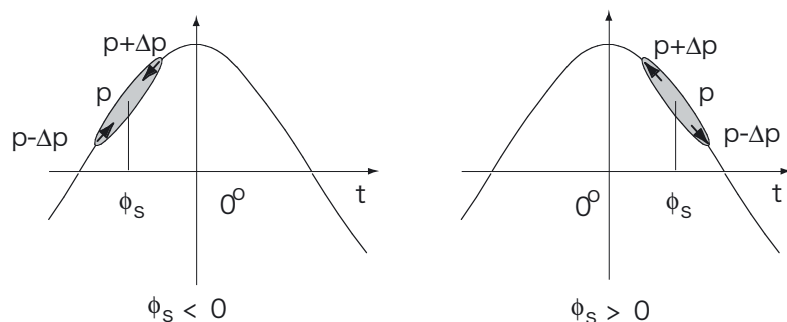
縦方向のビーム運動学 (Longitudinal beam dynamics)

位相安定性 (Phase stability)

線型加速器やシンクロトロンでは、サイクロトロンのような等時性はなく、粒子の加速位相はある一定の位相（同期位相、synchronous phase）のまわりを振動する：シンクロトロン振動（synchrotron oscillation）

線型加速器では

同期位相はビームのエネルギーの増大に合わせてギャップ間隔を増大させることによって確保する



運動量がより大きな（小さな）粒子は次のギャップにはより早く（遅く）到着する



粒子集団が同期粒子のまわりを振動する（位相安定性、phase stability）ためには

同期位相は $\phi_s < 0$ に設定する必要がある

位相安定性（続き）

シンクロトロンでは

同期位相はビームのエネルギーの増大に合わせて加速周波数を増大させることによって確保する

速度の違いによる周回時間の違い

$$T_{rev} = \frac{C}{v}$$

$$\frac{\Delta T_{rev}}{T_{rev}} = \frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta v}{v} \quad \left(\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p} \right)$$

$$= \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta p}{p}$$

$$\alpha \approx \frac{1}{v^2} \quad : \text{Momentum compaction factor}$$



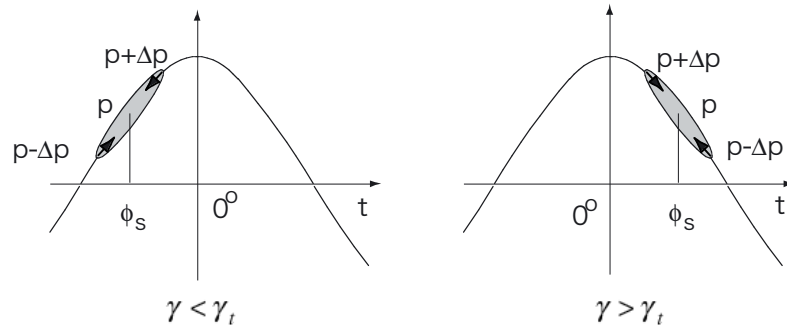
$\alpha - \frac{1}{\gamma^2} > 0$ のとき、 $\Delta p > 0$ の粒子はよりゆっくり周回する
 $\alpha - \frac{1}{\gamma^2} < 0$ のとき、 $\Delta p > 0$ の粒子はより速く周回する

両者の境目では

$$\alpha = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\gamma_t \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad : \text{Transition gamma}$$

位相安定性 (続き)



γ_t 以下のイオン

電子または
 γ_t 以上のイオン

加速時、 γ_t のところで加速電圧の位相をシフトさせることによって同期位相をジャンプさせる

サイクロトロンでは

$$\begin{aligned} v_r &\approx \gamma \\ \alpha &\approx \frac{1}{v_r^2} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \gamma_t$$

サイクロトロンでは常に transition gamma 上で運転

└─────────> すべての粒子の位相は固定

シンクロトロン振動 (Synchrotron oscillation)

シンクロトロン振動の運動方程式

単位時間当りの RF 位相のずれ

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_{rf} - h\omega = h(\omega_s - \omega) \quad (\omega_s : \text{同期粒子の周回周波数})$$

$$\omega(E) = \omega(E_s + \Delta E) = \omega(E_s) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial E} \right|_{E=E_s} \Delta E$$



位相に関する微分方程式

$$\frac{d\phi}{dt} = h\omega_s \kappa \frac{\Delta E}{E_s} \quad \left(\kappa \equiv - \left. \frac{E_s}{\omega_s} \frac{\partial \omega}{\partial E} \right|_{E=E_s} \right)$$

1 周当りのエネルギー利得

$$\delta E_s = qV \cos \phi_s$$

$$\delta E = qV \cos \phi$$

$$\delta(E - E_s) = \delta \Delta E = qV(\cos \phi - \cos \phi_s)$$



エネルギー利得に関する微分方程式

$$\frac{d\Delta E}{dt} = \frac{\omega_s}{2\pi} qV(\cos \phi - \cos \phi_s)$$

したがって

位相に関する運動方程式

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{qVh\omega_s^2 \kappa}{2\pi E_s} (\cos \phi - \cos \phi_s)$$

シンクロトロン振動（続き）

小振幅シンクロトロン振動

位相に関する運動方程式

$$\frac{d^2 \Delta\phi}{dt^2} = \frac{qVh\omega_s^2 \kappa}{2\pi E_s} \{ \cos(\phi_s + \Delta\phi) - \cos\phi_s \} \quad (\Delta\phi = \phi - \phi_s)$$

$$\frac{d^2 \Delta\phi}{dt^2} + \frac{qVh\omega_s^2 \kappa}{2\pi E_s} \sin\phi_s \Delta\phi = 0 \quad (\Delta\phi \ll 1)$$

単振動

$$\Delta\phi = A \sin(\Omega_s t + \delta)$$

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{qVh\omega_s^2 \kappa}{2\pi E_s} \sin\phi_s} \quad : \text{シンクロトロン振動数}$$

$$\nu_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} T_{rev} = \frac{\Omega_s}{\omega_{rev}} \quad : \text{シンクロトロンチューン}$$

安定な運動の条件

$$\Omega_s : \text{実数} \quad \longleftrightarrow \quad \kappa \sin\phi_s > 0$$

$$\kappa \equiv -\frac{E}{\omega} \frac{d\omega}{dE} = \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{\gamma_t^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

したがって

$$\gamma < \gamma_t \text{ のとき } \phi_s < 0$$

$$\gamma > \gamma_t \text{ のとき } \phi_s > 0$$

$$\text{サイクロトロンでは} \\ \gamma = \gamma_t$$

シンクロトロン振動（続き）

大振幅シンクロトロン振動

ハミルトニアンを使って議論する

正準共役変数

$$(\phi, \Delta W)$$

$$\Delta W = \frac{\Delta E}{h\omega_s}$$

シンクロトロン振動の方程式

$$\frac{d\Delta W}{dt} = \frac{qV}{2\pi h} (\cos\phi - \cos\phi_s)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{h^2 \omega_s^2 \kappa}{E_s} \Delta W$$



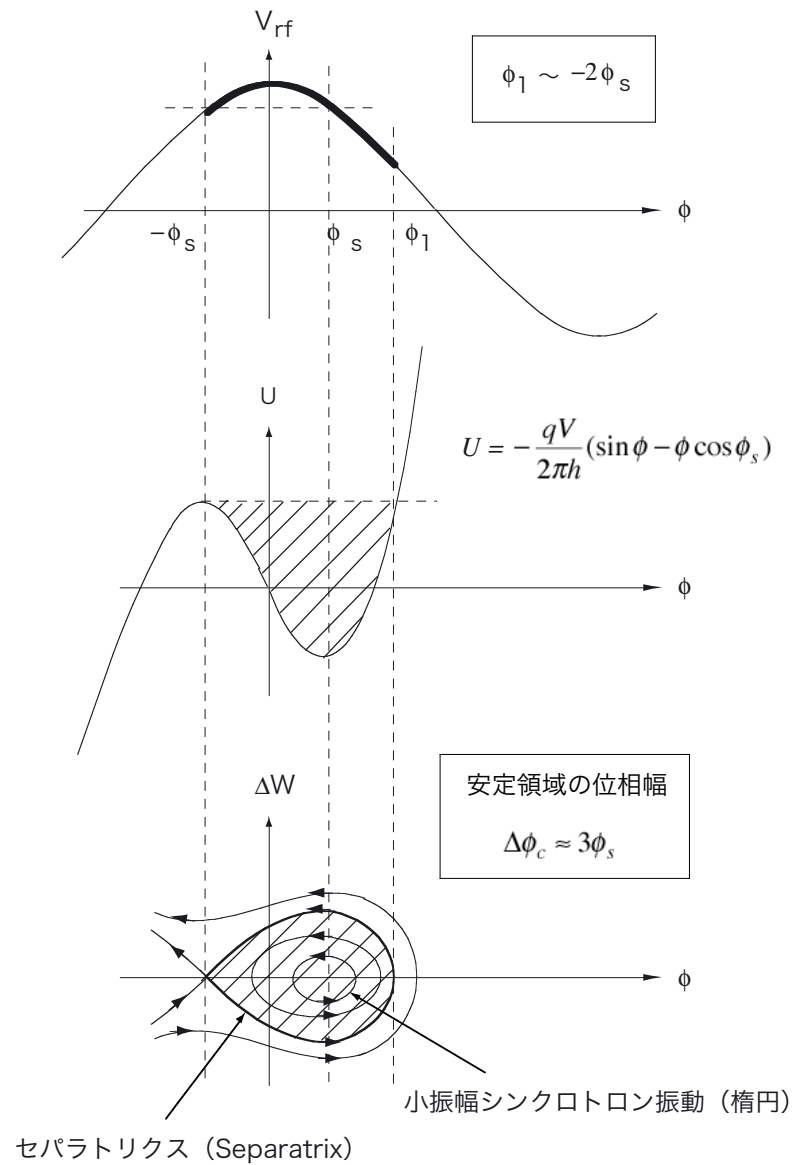
$$\frac{d\Delta W}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Delta W}$$

ハミルトニアン

$$H(\Delta W, \phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2 \omega_s^2 \kappa}{E_s} \right) (\Delta W)^2 - \frac{qV}{2\pi h} (\sin\phi - \phi \cos\phi_s)$$

大振幅シンクロトロン振動（続き）



断熱減衰 (Adiabatic damping)

粒子が加速される $\longrightarrow$ エミッタンスは減少する
 粒子が減速される $\longrightarrow$ エミッタンスは増加する

横方向の変化

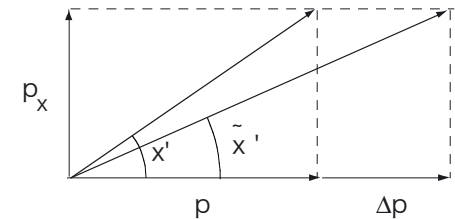
粒子の傾きの変化

$$x' = \frac{p_x}{p}$$

$$\tilde{x}' = \frac{p_x}{p + \Delta p} \approx \frac{p_x}{p} \left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right)$$

$$= x' \left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right)$$

$$\Delta x' = -\frac{\Delta p}{p} x'$$



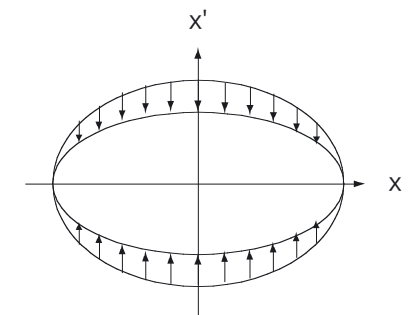
エミッタンスの変化

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$$

エミッタンスの変化率: $\frac{\Delta p}{p}$

$$\varepsilon \propto \frac{1}{p}$$



横方向の変化（続き）

運動方程式

$$\frac{d(m\dot{z})}{dt} + mv_z^2 \omega^2 z = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{z} + v_z^2 \omega^2 z = 0$$

$$z = z_0 g(t) \exp\left[\pm i \int v_z \omega dt\right]$$

$$\frac{dg}{g} = -\frac{1}{2} \frac{d(v_z \omega)}{v_z \omega} - \frac{1}{2} \frac{dm}{m} \quad \longleftarrow \quad \ddot{g}, \dot{g}\dot{m} \ll 1$$

$$g = \frac{\text{const}}{\sqrt{mv_z \omega}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{v_z B}}$$

$$z = \frac{\text{const}}{\sqrt{v_z B}} \exp\left[\pm i \int v_z \omega dt\right]$$

同様に

$$x = \frac{\text{const}}{\sqrt{v_r B}} \exp\left[\pm i \int v_r \omega dt\right]$$

$$x' \equiv \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{1}{R\omega}$$

$$= \frac{\text{const}}{\sqrt{v_r B}} \cdot v_r \omega \cdot \frac{1}{R\omega} \cdot \exp\left[\pm i \int v_r \omega dt\right]$$

$$= \text{const} \cdot \sqrt{\frac{v_r}{B}} \cdot \frac{1}{R} \cdot \exp\left[\pm i \int v_r \omega dt\right]$$

横方向の変化（続き）

シンクロトロンの場合

$$v_r = \text{const}$$

$$B \propto p$$

$$R = \text{const}$$

$$x \propto \frac{1}{\sqrt{v_r B}} \propto \frac{1}{\sqrt{p}} \propto \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}$$

$$x' \propto \sqrt{\frac{v_r}{B}} \cdot \frac{1}{R} \propto \frac{1}{\sqrt{p}} \propto \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}$$

サイクロトロンの場合

$$v_r \approx \gamma$$

$$B \propto \gamma$$

$$R \propto \beta$$

$$x \propto \frac{1}{\gamma}$$

$$x' \propto \frac{1}{\beta}$$

規格化エミッタンス

$$\varepsilon \propto x \cdot x' \propto \frac{1}{\beta\gamma}$$

$$\varepsilon \rightarrow \beta\gamma\varepsilon : \text{規格化エミッタンス}$$

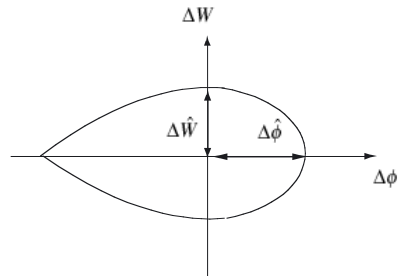
粒子の加減速によらず一定

縦方向の変化

シンクロトロンの場合

$$\Delta\hat{\phi} \propto \left[\frac{\omega_s^2 \kappa}{E_s q V \sin \phi_s} \right]^{1/4}$$

$$\Delta\hat{W} \propto \left[\frac{E_s q V \sin \phi_s}{\omega_s^2 \kappa} \right]^{1/4}$$

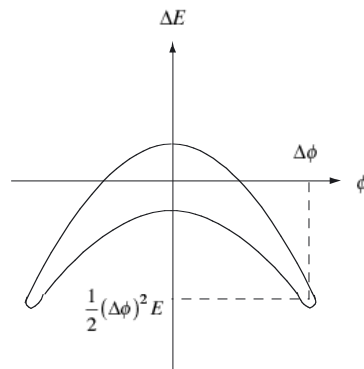


$$\Delta\hat{\phi} \cdot \Delta\hat{W} = \text{const}$$

サイクロトロンの場合

$$\Delta\phi = \text{const}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \frac{\sum_{i=1}^N qV(1 - \cos \Delta\phi)}{\sum_{i=1}^N qV} \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\phi)^2 \end{aligned}$$



バナナ図形の面積は一定

運動方程式のまとめ

運動量のずれ、磁場のずれがある場合の運動方程式

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{K(s)}{1 + \frac{\Delta p}{p}} x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta B}{B\rho}$$

共鳴 (Resonance)

不整磁場による共鳴 (Imperfection resonance)

内在的な共鳴 (Intrinsic resonance) / 本質的な共鳴 (Essential resonance)

ハミルトニアン

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + v_x^2 x^2 + p_y^2 + v_y^2 y^2)$$

$$H_1 = \sum_{n,m,p} a_{nmp} x^n y^m \cos p(\theta - \theta_0)$$

n, m : 自然数または
どちらかがゼロ
 p : 整数

運動方程式

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + v_x^2 x = - \sum_{n,m,p} n a_{nmp} x^{n-1} y^m \cos p(\theta - \theta_0)$$

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + v_y^2 y = - \sum_{n,m,p} m a_{nmp} x^n y^{m-1} \cos p(\theta - \theta_0)$$

$$\frac{d^2 x_1}{d\theta^2} + v_x^2 x_1 = - \sum_{n,m,p} n a_{nmp} x_0^{n-1} y_0^m \cos p(\theta - \theta_0)$$

$$\frac{d^2 y_1}{d\theta^2} + v_y^2 y_1 = - \sum_{n,m,p} m a_{nmp} x_0^n y_0^{m-1} \cos p(\theta - \theta_0)$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 \\ y &= y_0 + y_1 \\ \frac{d^2 x_0}{d\theta^2} + v_x^2 x_0 &= 0 \\ \frac{d^2 y_0}{d\theta^2} + v_y^2 y_0 &= 0 \end{aligned}$$

共鳴条件

右辺がそれぞれ v_x 、 v_y で振動すれば共鳴する

$$n v_x \pm m v_y = p$$

$n + m$: 共鳴の次数 (order of the resonance)

+ サイン : sum resonance

- サイン : difference resonance

共鳴 (続き)

誤差磁場 ΔB があるときの水平方向の運動方程式

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s)x = - \frac{\Delta B}{B\rho}$$

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + v_r^2 x \approx -R \frac{\Delta B}{B_0}$$

Smooth approximation

$$K(s) \Rightarrow \left(\frac{v_x}{R}\right)^2$$

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + v_r^2 x = - \frac{R}{B_0} \left\{ \sum_p (b_p^0 + b_p^1 x + b_p^2 x^2 + \delta_p xy + \dots) \cos p\theta \right\}$$

共鳴の種類

$$\sum_p b_p^0 \cos(p\theta) \quad : \text{二重極磁場誤差}$$

$$\sum_p b_p^1 \cos(p\theta) x \quad : \text{四重極磁場誤差}$$

$$\sum_p b_p^2 \cos(p\theta) x^2 \quad : \text{六重極磁場誤差}$$

$$\sum_p \delta_p \cos(p\theta) xy \quad : \text{結合共鳴を引き起こす磁場誤差}$$

整数共鳴 (Integer resonance)

二重極磁場誤差が引き起こす共鳴

磁場誤差

$$\Delta B(r, \theta) = b_N \cos N(\theta - \theta_N)$$

$p = N$: N 次ハーモニクス

運動方程式

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + v_r^2 x \approx -R \frac{b_N}{B_0} \cos N(\theta - \theta_N)$$

特別解：変位後の平衡軌道

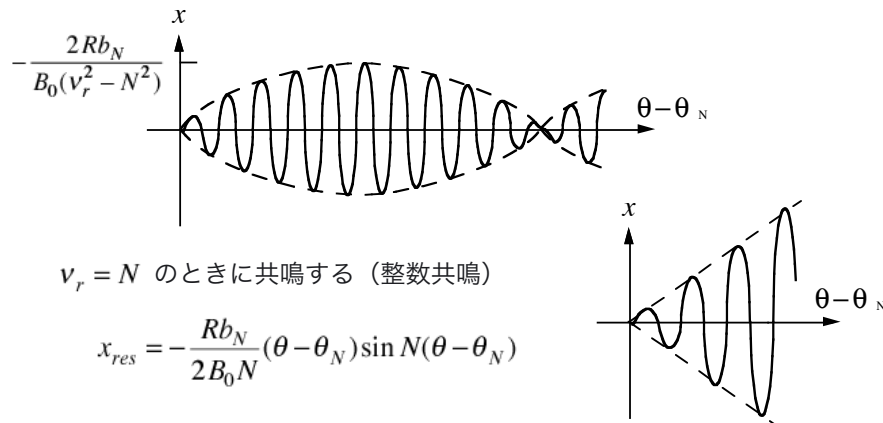
$$x_p = -R \frac{b_N}{B_0(v_r^2 - N^2)} \cos N(\theta - \theta_N)$$

平衡軌道のずれの最大値

$$x_p = -\frac{b_N R}{B_0(v_r^2 - N^2)}$$

一般解：変位後の平衡軌道のまわりの単振動

$$\begin{aligned} x_g &= -R \frac{b_N}{B_0(v_r^2 - N^2)} [\cos N(\theta - \theta_N) - \cos v_r(\theta - \theta_N)] \\ &= -R \frac{b_N}{B_0(v_r^2 - N^2)} \sin \frac{v_r + N}{2} (\theta - \theta_N) \sin \frac{v_r - N}{2} (\theta - \theta_N) \end{aligned}$$



$v_r = N$ のときに共鳴する (整数共鳴)

$$x_{res} = -\frac{R b_N}{2 B_0 N} (\theta - \theta_N) \sin N(\theta - \theta_N)$$

バネの単振動運動に、それと同じ振動数の外力が加わったときの共鳴運動に対応

半整数共鳴 (Half-integer resonance)

四重極磁場誤差が引き起こす共鳴

磁場誤差

$$\Delta B(r, \theta) = g_N x \cos N(\theta - \theta_N)$$

$p = N$: N 次ハーモニクス

運動方程式

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + v_r^2 x \approx -R \frac{g_N}{B_0} x \cos N(\theta - \theta_N)$$

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + \left[v_r^2 + \frac{R g_N}{B_0} \cos N(\theta - \theta_N) \right] x = 0$$

Mathieu 方程式

Mathieu 方程式の振動項 $\frac{R g_N}{B_0} \cos N(\theta - \theta_N) x$ は AG 収束が新たに付け加わったことを意味する



ベータトロン振動数のシフト : $v_r \rightarrow \tilde{v}_r$

$$\cos \frac{2\pi}{N} \tilde{v}_r = \cos \frac{2\pi}{N} v_r - \frac{\pi R^2 g_N}{2 N v_r B_0^2 (N^2 - 4 v_r^2)} \sin \frac{2\pi}{N} v_r$$

半整数共鳴（続き）

$\nu_r = \frac{N}{2}$ の近傍で展開

$$(\tilde{\nu}_r - \frac{N}{2})^2 = (\nu_r - \frac{N}{2})^2 - (\Delta\nu_r)^2$$

$$\Delta\nu_r = \frac{Rg_N}{2B_0N}$$

$\left| \nu_r - \frac{N}{2} \right| < \Delta\nu_r$ のとき $\tilde{\nu}_r$ は虚数となる

→ ビームは不安定となる（半整数共鳴）

$2\Delta\nu_r$: ストップバンド

$\nu_r \approx 1$ の場合、バネの単振動運動でそのほぼ2倍の振動数で変わる項がバネの力に付け加わったときの共鳴運動に対応

→ パラメトリック共鳴
例：ブランコこぎ

AVF サイクロトロン

$\nu_r \approx 1$ であるから2セクター（ $N=2$ ）は使えない

リングサイクロトロン

3セクター（ $N=3$ ）では $\nu_r = 1.5$ を通過できない

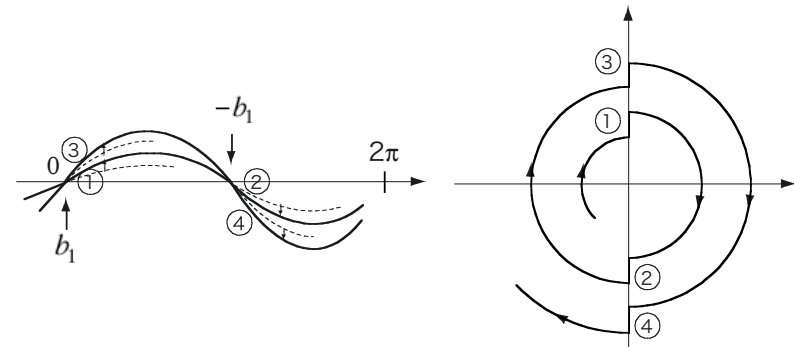
4セクター（ $N=4$ ）では $\nu_r = 2$ を通過できない

整数共鳴と半整数共鳴のまとめ

例： $\nu_r = 1$ の共鳴に2通りある

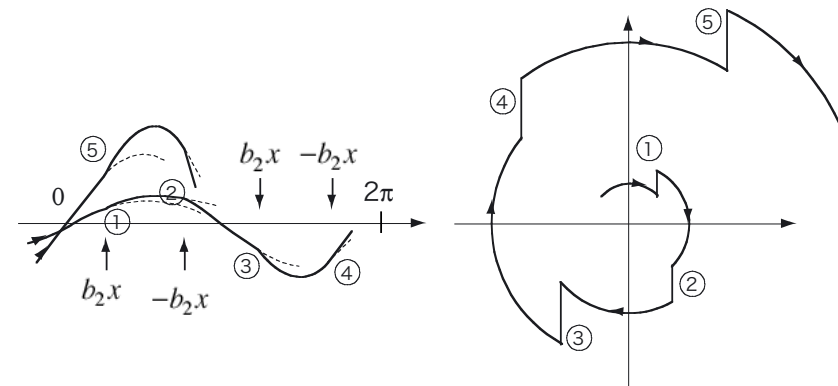
整数共鳴 $\nu_r = 1 \leftarrow b_1 \cos \theta$

毎回同じ大きさのキック → 線型的に増大



半整数共鳴 $\nu_r = \frac{2}{2} \leftarrow b_2 x \cos 2\theta$

x に比例した大きさのキック → 指数関数的に増大



結合共鳴 (Coupling resonance)

垂直、水平両方向の運動が互いに影響を及ぼすことによって引き起こされる共鳴

線型結合 (Linear coupling)

例：四重極磁石が理想的な位置より少し回転している場合に生じる

$$\begin{aligned} B_y &= B'(x \cos \phi + y \sin \phi) \\ B_x &= B'(y \cos \phi - x \sin \phi) \end{aligned}$$

非線型結合 (Nonlinear coupling)

例：六重極磁石によって生じる

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{1}{2} B''(x^2 - y^2) \\ B_y &= B''xy \end{aligned}$$

Walkinshaw 共鳴： $v_r = 2v_z$

誤差磁場のない理想的なサイクロトロンでも生じる
本質的 (essential) な結合共鳴

運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\theta^2} + v_r^2 x &= \frac{1}{2} \mu''(y^2 - x^2) \\ \frac{d^2 y}{d\theta^2} + v_z^2 y &= \mu'' xy \end{aligned} \quad \leftarrow \quad \begin{aligned} y &= \frac{z}{r_0} \\ \mu'' &= \frac{r_0^2}{B_0} \frac{d^2 B}{dr^2} \end{aligned}$$

振動エネルギー

$$J_0 = \frac{v_r}{R^2} (x_0^2 + \frac{1}{4} z_0^2) = \text{一定}$$

x_0, z_0 : ある時点での振幅

結合共鳴 (つづき)

x 方向のすべてのエネルギーが y 方向に移るとすると

$$z_0^{\max} = 2x_0^{\max}$$



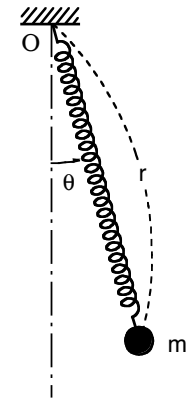
ビームがビームチェンバーの上下の内壁に当たって失われることがある

AVF サイクロトロンやリングサイクロトロンでは、(加速電圧が高く) 共鳴付近に滞在する時間が短いためにほとんど問題なく通過できる。

● バネ振り子と対比できる。

共鳴条件

$$\omega_{\text{垂直}} = 2\omega_{\text{水平}}, \quad \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}$$



Mathieu 方程式の適用例

真空の物理と応用

東京大学教授 理博

熊谷寛夫

東京大学助教授 理博

辻泰

東京大学教授 理博

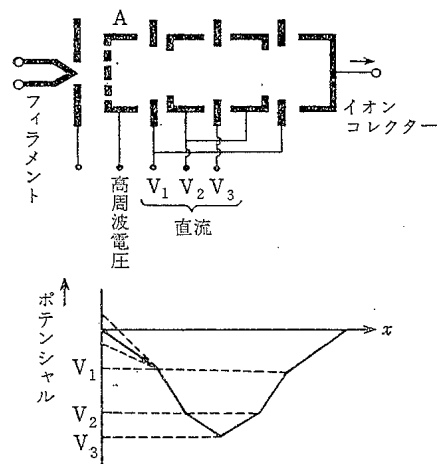
富永五郎

名古屋大学助教授 理博

堀越源一

東京裳華房 発行

た加速段数も少ないので Bennett の結果によれば分解能は約 15 であった。加速の段数を増せば性能は向上するはずであるが、技術的に困難なので*、現在では他の機種により関心が集まっているのが実情である。精度よく組み立て、高周波電圧を高くすることによって、感度として $2 \times 10^{-6} \text{ A/Torr}$ 、分解能 100 (ただし、 ΔM はピークの 50% のときの幅である) の性能を得た例がある^{51,52)}。磁石が不要であり軽量なので、ロケットに積んだりするには適している。



6-61 図 ファビトロン

の往復運動の周期はその振幅によらず一定である。そこで、この周波数と同じ周波数の高周波電圧を、グリッドAに与えてやると、イオンはエネルギーを得てしだいに振幅を増し、結局イオンコレクターに達する。これはちょうどブランコを漕ぐときの事情と似ている**。ポテンシャルの形が一定の場合、イオンの振動の周波数は q/m に比例するから、グリッドに印加する高周波の周波数を変え、イオンコレクターの電流を観測する。ファビトロンは、Leybold 社で製作されており、小型軽量で操作も比較的簡単であるが、性能はあまりよくなく分解能も 10 程度であり、定性的な観測に用いられる。

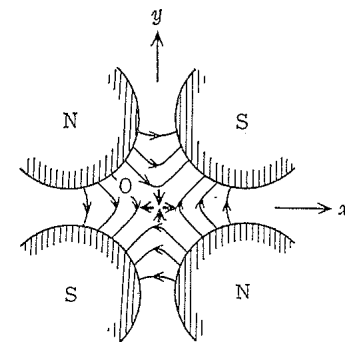
(f) 4 重極 (quadrupole) 型質量分析器 (マスフィルター)

電子あるいはイオンビームを発散させることなく長い距離を通過させるのに、普通ソレ

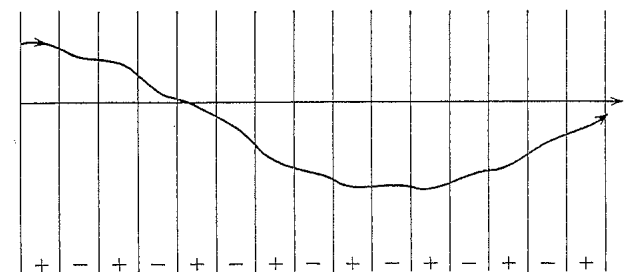
* 加速段数をふやしたものは、Topatron (トパトロン) の商品名で Leybold 社が市販している。

** ブランコの場合は、外から加える力の周波数は振動周波数の 2 倍である。

ノイド磁石または 4 重極磁石系をレンズとして用いる。4 重極磁石 (Q 磁石) は 6-62 図に示すようなもので、中心軸上 O では磁界は 0 であり、O よりの距離に比例して磁界は強くなる。磁界の方向からわかるように、軸と平行に荷電粒子が運動するとき、粒子の受ける力は図に示すように (図では正イオンの場合の力)、上下の方向では中心に向かい、左右の方向では中心から外に向かって働く。すなわち上下方向では集束力、左右方向では発散力が働く。Q 磁石を用いたレンズ系では、Q 磁石の極性の違うものを交互に同じ間隔で配置してある。粒子の運動方向を z 軸にとれば、粒子は x および y 方向に交互に集束力または発散力を受けることになるが、粒子の m/q 、Q 磁石の強さ、周期等が一定の範囲内にある場合に限って、粒子の軌道は総合的には集束力を受け、 x および y 方向に発散することなく振動しながら z 軸に沿って運動を続ける (6-63 図)。



6-62 図 正イオンが紙面の手前から向こう側に向かうときの力を太い矢印で示す。

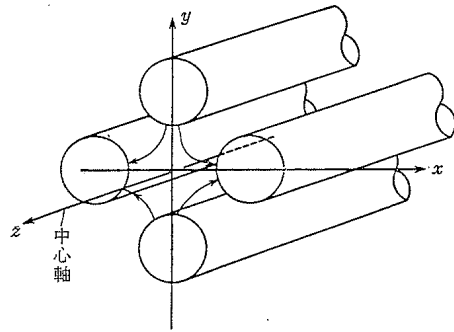


6-63 図 Q 磁石による集束作用
+, - はそれぞれ集束部, 発散部を示す。

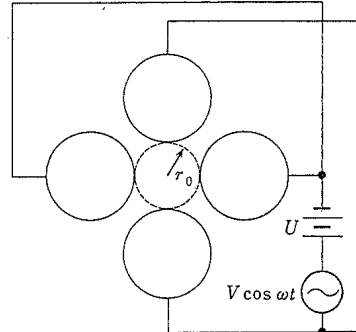
Q 磁石と同じような働きは、電界を用いても行なうことができる。6-64 図のように 4 個の円柱を z 軸に平行に配置すれば、これらに囲まれた空間内には図に示したように、直角双曲線群で表わされるような電界が生じ、 z 軸に沿って運動する荷電粒子に対しては、Q 磁石による力と同じような力が働く。粒子を集束するためには一定の間隔で極性を反対にしなければならないが、その代りに 4 本の円柱に印加する電圧を、直流ではなく交流電圧とすることで達成される。

この性質を応用したのが 4 重極型質量分析器であるが、そのためには特定のイオンに対

してのみ集束作用を持ち、他のイオンに対してはすべて発散作用を持つようなレンズ系でなければならない。それには、4本の電極に印加する電圧に、交流電圧のほかに直流電圧も重ね合わせる、うまい方法がある。この場合、どのような条件によってイオンが発散あるいは集束されるかを、6-64図に示したような座標系について、イオンの運動方程式を立て若干の考察を行なうことにする。



6-64 図



6-65 図

4重極による電界の強さは中心軸上で0であり、中心軸からの距離に比例して強くなる。しかも x 軸と y 軸では電圧の向きは反対であるから (6-64図), 直流電界と交流電界を重ね合わせたときの電界 $E(E_x, E_y, E_z)$ は,

$$\left. \begin{aligned} E_x &= (E_0 + E_A \cos \omega t)x, \\ E_y &= -(E_0 + E_A \cos \omega t)y, \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

である。

電界強度 E の代りに、4本の電極を6-65図のように接続して印加する電圧 U_0 で表わすことにすれば,

$$U_0 = U + V \cos \omega t \quad (U = r_0^2 E_0, \quad V = r_0^2 E_A) \quad (6.50)$$

となる。ただし r_0 は電極棒に内接する円の半径である。

(6.49), (6.50) 式よりイオンの運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{e}{mr_0^2} (U + V \cos \omega t)x, \\ \ddot{y} &= \frac{e}{mr_0^2} (U + V \cos \omega t)y, \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

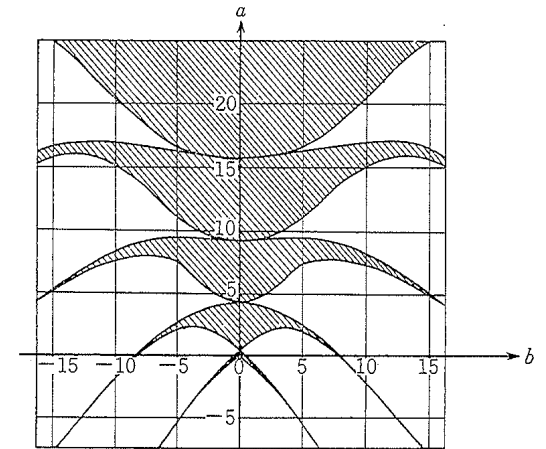
となる。(6.51) 式はマシューの微分方程式として知られており、その解の性質もよくわかっている⁵³⁾。(6.51) 式を標準型

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + (a - 2b \cos 2\xi)x = 0 \quad (6.52)$$

に変形するために、 $\omega t = 2\xi$ (または $\omega t = 2\xi + \pi$) の変数変換を行なえば,

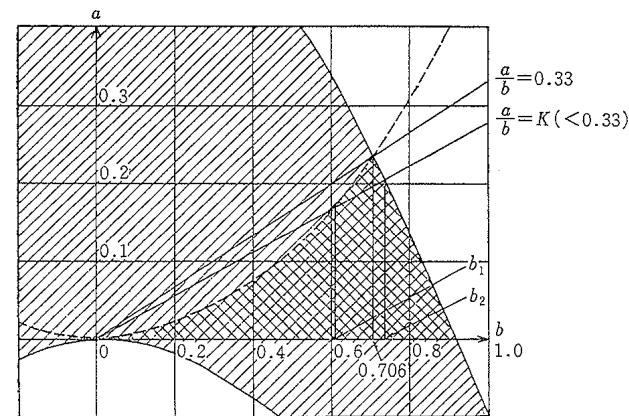
$$\left. \begin{aligned} a &= \pm \frac{4eU}{m\omega^2 r_0^2}, \\ b &= \frac{2eV}{m\omega^2 r_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

となる。(6.52) 式の解は、 a, b の値によって、(1) 指数関数的に発散する不安定な場合と、(2) 周期的に振動する安定な場合とがあり、安定および不安定な場合の a, b の値は、6-66図に示してある。 x および y がともに安定であるためには、6-66図で、 $a \rightarrow -a$ と変換し



6-66 図 マシュー関数の安定領域 (斜線部)

ても安定でなければならぬから、このような条件を満たす a, b の範囲は、同図での影の部分をもとに、 b 軸を軸として裏返して、重なり合った部分に限定される。6-67図は、この部分を拡大したもので、斜線部分が安定領域である。 U, V を一定に固定しておけば*



6-67 図

a, b はイオンの質量に応じて変わるが、 a, b の比は変わらず、 $a-b$ 面上では、

$$\frac{a}{b} = \frac{2U}{V} \equiv K$$

* すなわち、直流電圧、交流電圧をそれぞれ一定にすれば。

できる直線上を変化することになる。したがって、直線 $\frac{a}{b} = K$ が安定領域に入り込んでいる範囲が4重極電界で集束されてイオンコレクターに達するイオンの質量 m を規定することになる：すなわち、6-67図に示すように、直線 $\frac{a}{b} = K$ と安定領域の境界との交点を $b_1, b_2 (b_1 < b_2)$ とすれば、

$$m_2 < m < m_1$$

なる質量範囲のイオンが集束されることになる。ただし m_1, m_2 は、

$$m_1 = \frac{2eV}{b_1\omega^2 r_0^2}, \quad m_2 = \frac{2eV}{b_2\omega^2 r_0^2} \quad (6.54)$$

で与えられる。すべての質量範囲でガス分析を行なうには、 U/V を一定値に保ったまま、 U および V を同じ割合で変化させてやればよい。この場合の分解能は6-67図に示した b_1, b_2 で表わすことができ、

$$\frac{M}{\Delta M} = \frac{\frac{m_1 + m_2}{2}}{m_1 - m_2} = \frac{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}}{2\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right)} = \frac{b_1 + b_2}{2(b_2 - b_1)} \quad (6.55)$$

となる。したがって $b_1 = b_2$ のとき分解能は極限値として無限大に達するが、同時にイオンコレクター電流も0になってしまう。この場合の U/V の値は0.1678である。

U/V の値を正確に一定に保ったまま、 U および V を掃引することはむずかしく、また増幅器の利得とのかね合いから、 U/V の値を0.1678より若干小さい値にしておくのが普通である。4重極型質量分析器の最大の長所は、磁場を用いないことであるが、そのほかに、電源および増幅器の性能を上げれば非常に高い分解能を得られることである。実際には分析管は有限であるので、粒子軌道の振幅が管の内径 ($\approx r_0$) よりも大きければ、イオンは途中で失われてしまうので、粒子が失われずに集束される条件は、6-66図に示した安定軌道の条件よりさらにきびしくなる。また、イオン源を出る時のイオンの広がり等によっても安定条件は変わり*、事実上の分解能はむしろこのような因子で決まる。このような場合、分解能 $\frac{M}{\Delta M}$ はすべての質量範囲で一定ではなく、むしろ M に比例する(すなわち $\Delta M = \text{一定}$) 傾向がある。この型のもので市販品は、分解能として $\Delta M \leq 1$ 程度、 M の最大値は400程度のものがある。

(g) 飛行時間型質量分析器

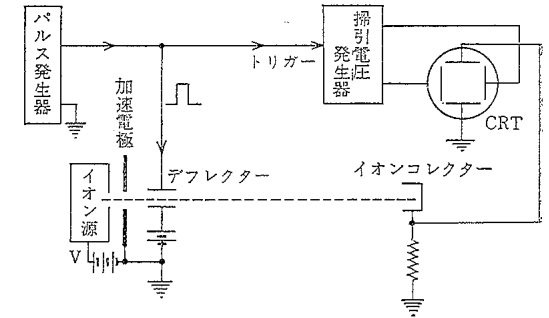
異なった質量の粒子が同じ運動のエネルギーで運動するときの速度は、質量の平方根に逆比例する。このことを利用し、粒子の運動のエネルギーと速度とを同時に知ることがで

* 安定領域の境界がぼけてくる。

ければ、それから質量を知ることができる。飛行時間 (time of flight) 型質量分析器は、このような考え方から出発した比較的新しい質量分析器である。

6-68図は分析器の1例を示す。

イオン源で生じたイオンは加速電圧 V で加速された後、偏向電極の間を通過する。偏向電極には普段は電圧が印加されていて、イオンは偏向されてイオンコレクターに達しないが、電極に幅のせまいパルス電圧 (図の場合は正の電圧) がかけると偏向能力がなく



6-68 図

なって、その瞬間に限って電極を通過したイオンはイオンコレクターに達する。質量 m 、電荷 q のイオンが電圧 V で加速されたときの速度 v は、

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

であるから、偏向電極からイオンコレクターまでの距離を L とすれば、イオンは

$$t = \frac{L}{v} = L\sqrt{\frac{m}{2qV}} \quad (6.56)$$

なる時間の後にコレクターに達する。したがって、コレクターに流れるイオン電流を時間の関数として観測すれば、その電流波形より質量分析を行なうことができる。この場合の分解能は、偏向電極にかかる負のパルス電圧の時間幅 τ と、(6.56) 式で与えられる時間 t によっておおよそその値が与えられ、

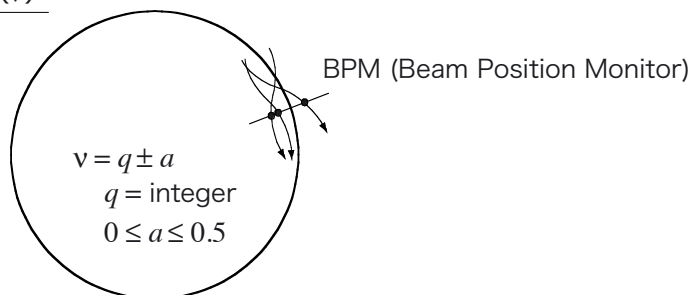
$$\frac{m}{\Delta m} \approx \frac{L}{2\tau} \sqrt{\frac{m}{2qV}} \quad (6.57)$$

となる。ただしイオンの速度分布を考慮に入れると、分解能は若干低下する。現在の電子技術では、 $\tau \leq 10^{-8}$ sec にすることはそれほど困難ではない。イオン電流の検出器としては、電流の時間変化を τ 以下の短い時間まで観測しなければならないので、応答の速い光電子増倍管や2次電子増倍管が用いられる。現在、分解能はかなり高く、400程度のものがある。

この型のもつ最大の利点は、全質量の領域にわたって、質量スペクトルが非常に短時間で得られることである。このようなことは、他のいかなる質量分析器でも不可能に近いことであつたので、速い圧力変化の過程を観測するような場合、最適の測定器である。原理

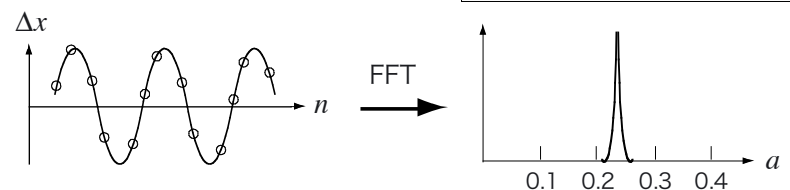
マシンパラメータの測定方法

チューン (v)

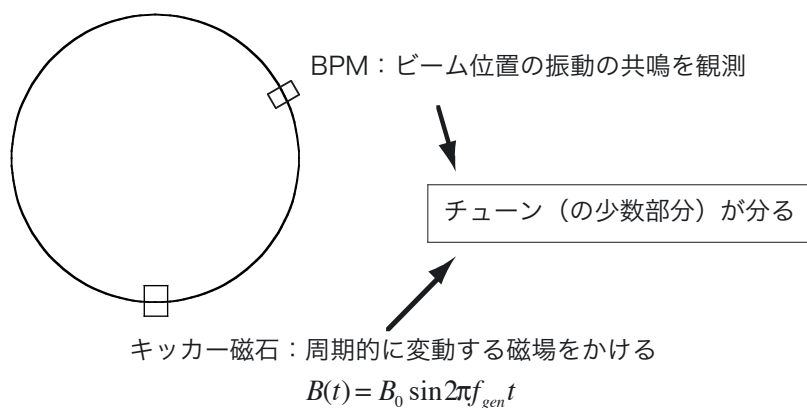


(1) Δx を 1 ターン毎に測定

$$\Delta x = x_0 \cos(2\pi v n + \delta)$$



(2) Δx をオシロスコープやスペクトラムアナライザーで測定

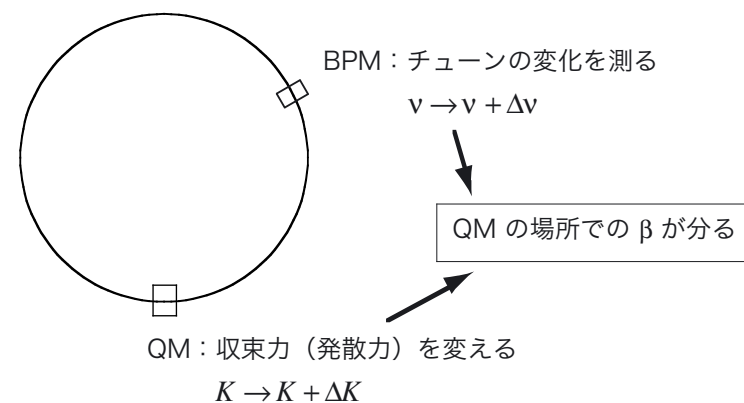


$$f_{gen} = a f_{rev} \text{ のときベータトロン振動の共鳴が引き起こされる}$$

マシンパラメータの測定方法 (続き)

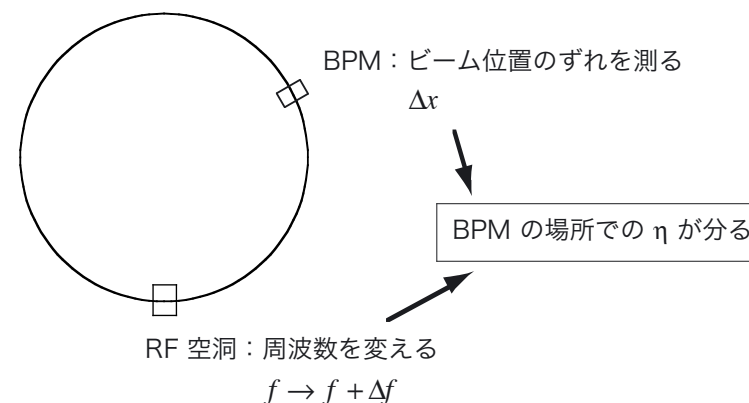
ベータ関数 (β)

$$\Delta v = -\frac{1}{4\pi} \int \Delta K \beta(s) ds$$



分散関数 (η)

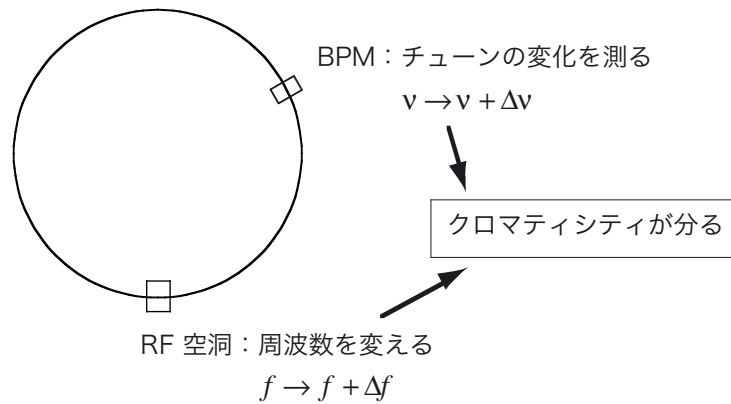
$$\eta = \frac{\Delta x}{\Delta p / p} = -\alpha \frac{\Delta x}{\Delta f / f}$$



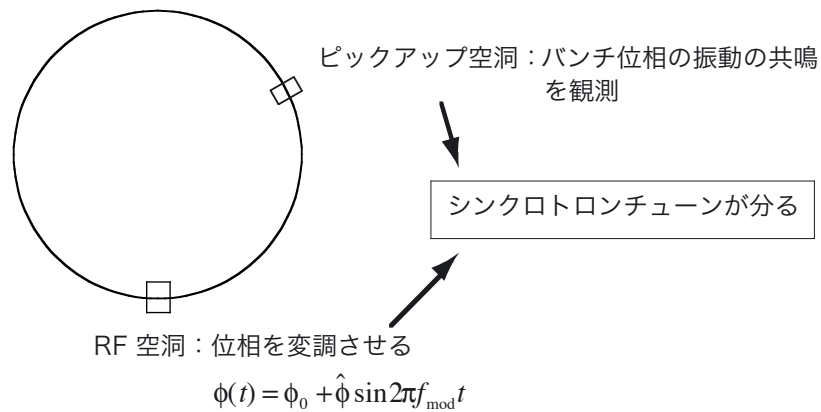
マシンパラメータの測定方法（続き）

クロマティシティ (ξ)

$$\xi = \frac{\Delta v}{\Delta p / p} = -\alpha \frac{\Delta v}{\Delta f / f}$$



シンクロトロンチューン (ν_s)



$$f_{\text{mod}} = \nu_s f_{\text{rev}} \text{ のとき共鳴によりシンクロトロン振動を引き起こす}$$

ビーム入射 (Beam injection)

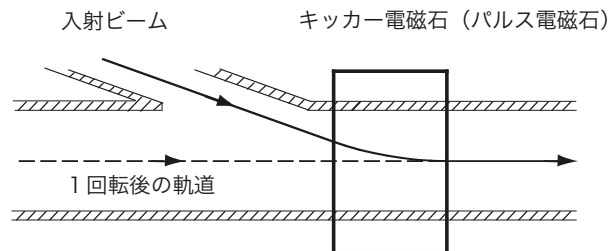
サイクロトロン

- 内部イオン源 (普通型サイクロトロン、AVF サイクロトロン)
- 静電インфлекター (AVF サイクロトロン垂直入射)
- 偏向電磁石 + 磁気チャンネル + 静電インфлекター
(リングサイクロトロン)
- 荷電変換入射

シンクロトロン

- 1 回転入射

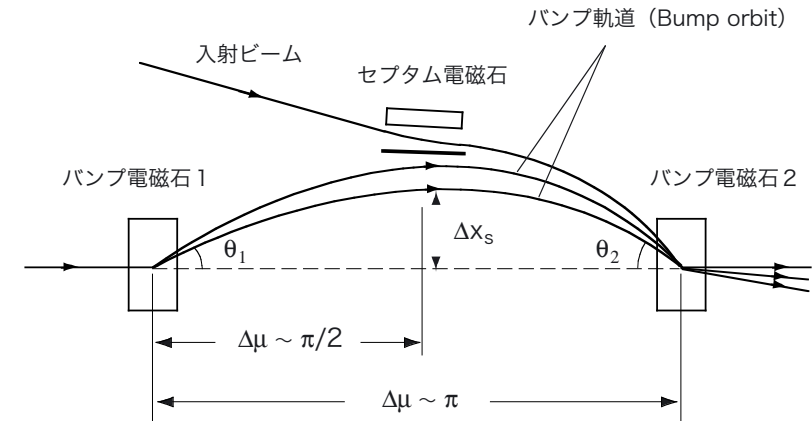
ビーム 1 回転の間だけキッカー電磁石をパルス的に励磁



ビーム入射 (続き)

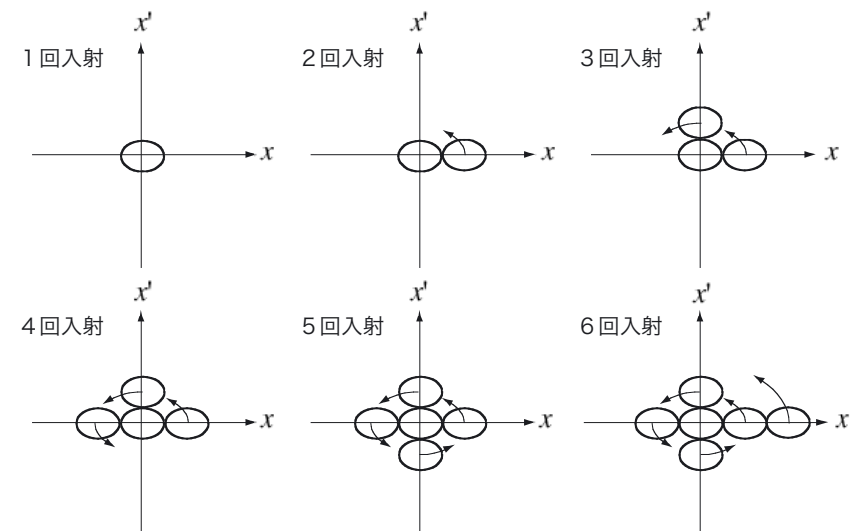
シンクロトロン (続き)

- 多重入射



$$\Delta x_s = \sqrt{\beta_1 \beta_s} \theta_1 \quad \theta_2 = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \theta_1$$

$$\nu \approx \text{整数} \pm \frac{1}{4}$$



軌道バンプ (Orbit bumps)

ビームの入射や取出しのために、キックを与えて周回軌道を閉軌道からずらす

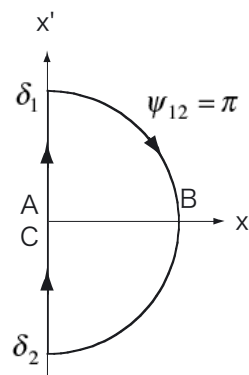
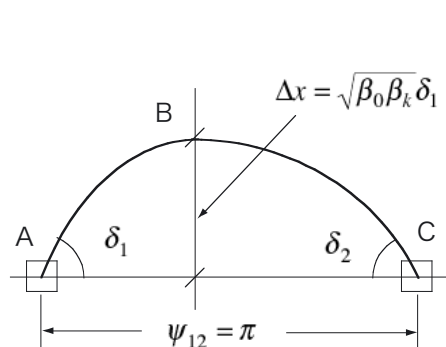
ある点で、けり角 δ を与えた後の軌道

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_k}} (\cos \Delta\psi + \alpha_k \sin \Delta\psi) \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta_k \beta}} [(1 + \alpha_k \alpha) \sin \Delta\psi + (\alpha - \alpha_k) \cos \Delta\psi] \\ \sqrt{\beta_k \beta} \sin \Delta\psi \\ \sqrt{\frac{\beta}{\beta_k}} (\cos \Delta\psi - \alpha_k \sin \Delta\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

ここで、 $\delta = \frac{\Delta(Bl)}{B\rho}$



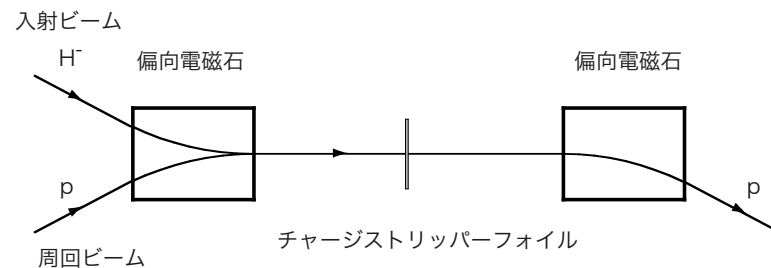
$$x(s) = \delta \sqrt{\beta(s) \beta_k} \sin \Delta\psi \quad (\Delta\psi = \psi - \psi_k)$$



ビーム入射 (続き)

シンクロトロン (続き)

● 荷電変換入射



リューヴィルの定理は当てはまらない



原理的には空間電荷限界まで入射可能

ビーム取出し (Beam extraction)

サイクロトロン

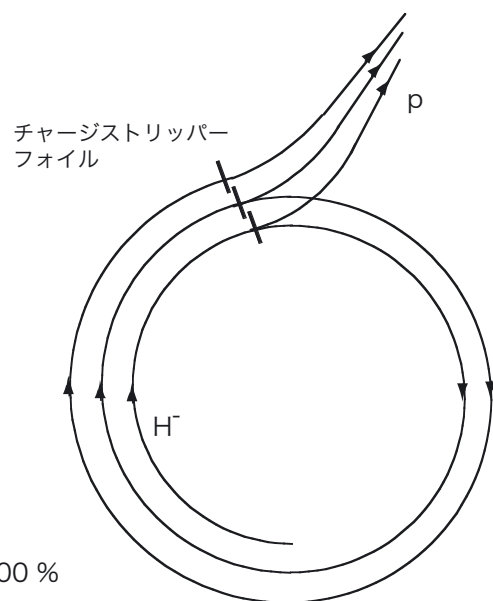
- 静電デフレクター + 磁気チャンネル

(AVF サイクロトロン、リングサイクロトロン)

シングルターン取出し

マルチターン取出し

- 荷電変換取出し

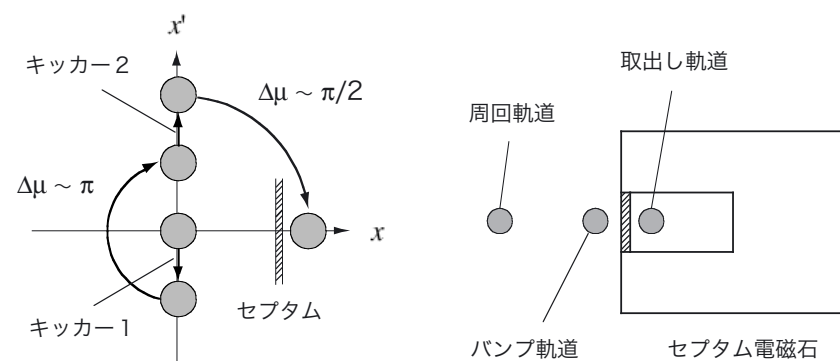
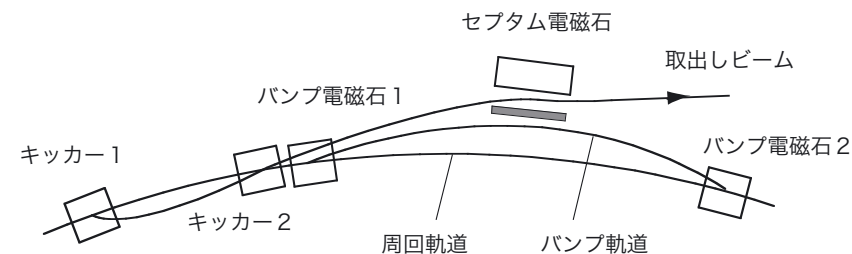


チャージストリッパフォイルの位置を変えることによって
ビームエネルギーを変えることができる

ビーム取出し (続き)

シンクロトロン

- 速い取出し (Fast extraction)

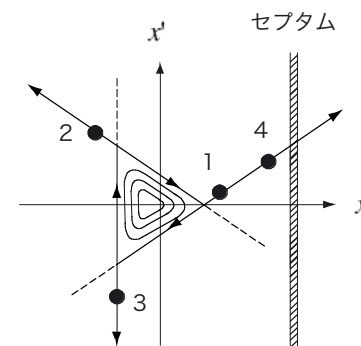


- 遅い取出し (Slow extraction)

3次整数共鳴を利用

$$\nu = N / 3$$

$$\Delta B(x, \theta) = a_N x^2 \cos N(\theta - \theta_N)$$

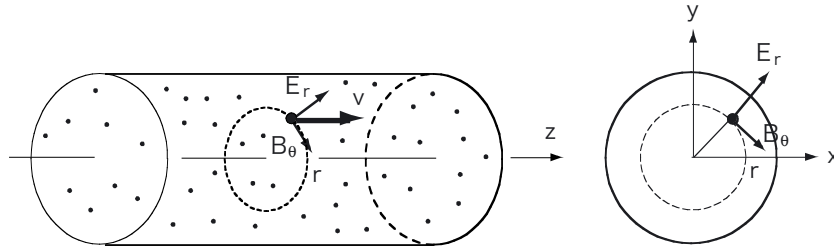


空間電荷効果 (Space charge effect)

横方向の効果

空間電荷力による発散作用 → チューンシフト

ビームにそっての粒子分布：一様
断面積内の粒子分布：一様 } と仮定



粒子密度

$$\rho = \frac{NQe}{2\pi RS}$$

R : リングの半径

N : リング 1 周上の全粒子数

Q : 粒子の電荷数

S : ビームの断面積

電場

$$E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \quad \leftarrow \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rE_r) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

磁場

$$B_\theta = \frac{\rho}{2\epsilon_0 c^2} v r \quad \leftarrow \quad \text{rot} \vec{H} = i, \quad (\text{rot} \vec{B})_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB_\theta) = \mu_0 \rho v = \frac{\rho v}{c^2 \epsilon_0}$$

横方向の効果 (続き)

粒子に働く力

$$\begin{aligned} \vec{F} &= Qe(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \frac{Qe\rho}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right\} \vec{r} \\ &= \frac{Qe\rho}{2\epsilon_0 \gamma^2} \vec{r} \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \end{aligned}$$

$$v \rightarrow c \quad (\beta \rightarrow 1) \quad \text{のとき} \quad \vec{F} \rightarrow 0$$



横方向の空間電荷効果は低エネルギーにおいて著しい

運動方程式

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + v^2 y = \frac{1}{m\omega^2} F \quad (y: \text{横方向の座標})$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{d\theta^2} + v^2 y = \frac{R^2}{Am_0 \gamma \beta^2 c^2} \cdot \frac{Qe}{2\epsilon_0 \gamma^2} \cdot \frac{NQe}{2\pi RS} y \quad (A: \text{粒子の質量数})$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{d\theta^2} + \left(v^2 - \frac{Q^2}{A} \cdot \frac{Nr_0 R}{S} \cdot \frac{1}{\beta^2 \gamma^3} \right) y = 0 \quad (r_0: \text{陽子の古典半径})$$

または

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + (v + \Delta v)^2 y \approx 0$$

$$v \cdot \Delta v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{A} \cdot \frac{Nr_0 R}{S} \cdot \frac{1}{\beta^2 \gamma^3} : \text{空間電荷効果による横方向チューンシフト}$$

横方向の効果（続き）

電流限界値（Space charge limit）

チューンシフト（ Δv ）による新たなチューンが共鳴にかかるようになるとビームが失われる

→ ビーム電流の限界

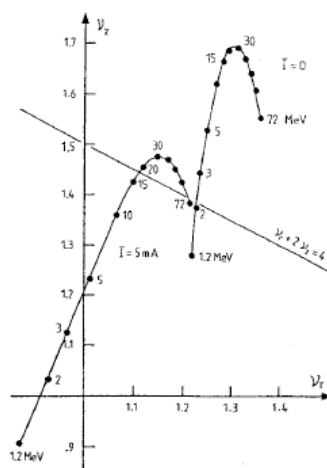
入射時点での条件で決まる

サイクロトロンの場合

- PSI 72 MeV 陽子サイクロトロン

AVF サイクロトロン : 1 mA

リングサイクロトロン : 5 mA



- 理研のサイクロトロン

AVF サイクロトロン（7 MeV/u $^{14}\text{N}^{5+}$ ） : 190 μA

シンクロトロンの場合

シンクロトロンではチューンは一般に 整数値 $\pm \frac{1}{4}$ の近傍に設定される

→ $\Delta v = 0.25$ のときのビーム電流が電流限界値

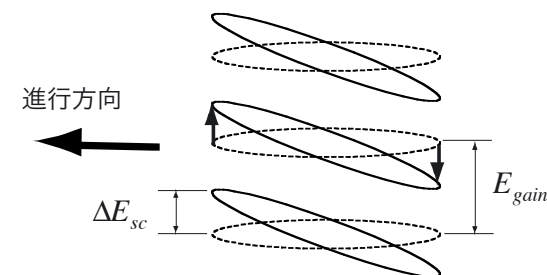
空間電荷効果（続き）

縦方向の効果

サイクロトロンの場合

空間電荷力によるエネルギー幅の広がり

→ ビーム進行方向には広がらずに
動径方向にビームが傾く (∴ 等時性)



シングルターン取出しができなくなる条件

取出しのところで $E_{\text{gain}} / \Delta E_{\text{sc}} \approx 1$ (ビームセパレーションがなくなるということ)

→ 電流限界値 $\propto \frac{1}{N^3} \propto V_{\text{rf}}^3$ N : 全ターン数
 V_{rf} : ディー電圧

- 理研のサイクロトロン

AVF サイクロトロン（7 MeV/u $^{14}\text{N}^{5+}$ ） : 80 μA

リングサイクロトロン（135 MeV/u $^{14}\text{N}^{7+}$ ） : 140 μA

シンクロトロンの場合

シンクロトロン振動数の減少をもたらす。ただし、transition energy の領域以外ではこの効果は小さい。

ルミノシティー (Luminosity)

$$\dot{N}_p = \sigma_p L$$

$\dot{N}_p$: 単位時間当りに起こる事象 [s^{-1}]

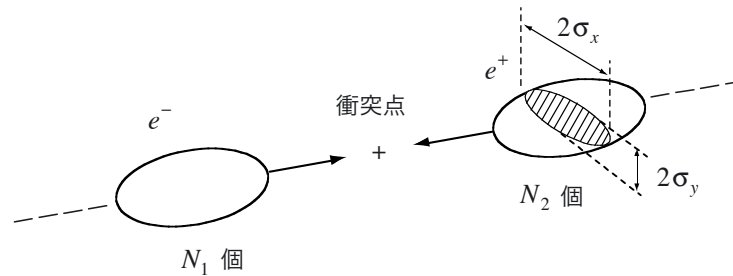
σ_p : 反応断面積 [cm^2] [nb] [pb]

$$1\text{ b} = 10^{-24}\text{ cm}^2$$

L : ルミノシティー [$cm^{-2}s^{-1}$] [$nb^{-1}s^{-1}$] [$pb^{-1}s^{-1}$]

$$L = \frac{1}{4\pi e^2 f_{rev}} \frac{I_1 I_2}{b \sigma_x^* \sigma_y^*} \quad \leftarrow \quad L = \frac{b}{4\pi} \frac{N_1 N_2}{\sigma_x^* \sigma_y^*} f_{rev}$$

b : バンチ数



$$N_p = \sigma_p \int_{run} L dt = \sigma_p I$$

I : 積分ルミノシティー [cm^{-2}] [nb^{-1}] [pb^{-1}]

KEKB

$$L = 2.1 \times 10^{34}\text{ cm}^{-2}s^{-1} = 21\text{ nb}^{-1}s^{-1} \quad (\text{世界最高})$$

$$I = L \cdot t = 1,000\text{ fb}^{-1} \quad (\text{これまでの総積分})$$

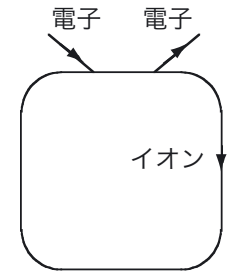
ビーム冷却 (Beam cooling)

ビーム温度 (ビームの重心系で測った粒子群の平均運動エネルギー) を下げる

↔ ビームの運動量幅およびエミッタンスを減少させる

主に2つの方法

1. 電子ビーム冷却
2. 確率冷却



電子ビーム冷却 (Electron cooling)

一様な速度をもつ高密度の電子ビームを蓄積リングのイオン軌道の一部に平行に合流させる

└ イオンと電子のクーロン相互作用によって、イオンの速度のばらつきが小さくなる

冷却時間

$$\tau_{ec} = \frac{\beta^4 \gamma^5 e (\theta_i^3 + 2\theta_e^3)}{12\pi r_i r_e L_c \eta j_e} \frac{A}{Z^2}$$

τ_{ec} : 数~数 10 sec
(重イオンの場合)

A, Z : イオンの質量および電荷数

θ_i, θ_e : イオンおよび電子の横方向の角度の広がり

r_i, r_e : イオンおよび電子の古典半径

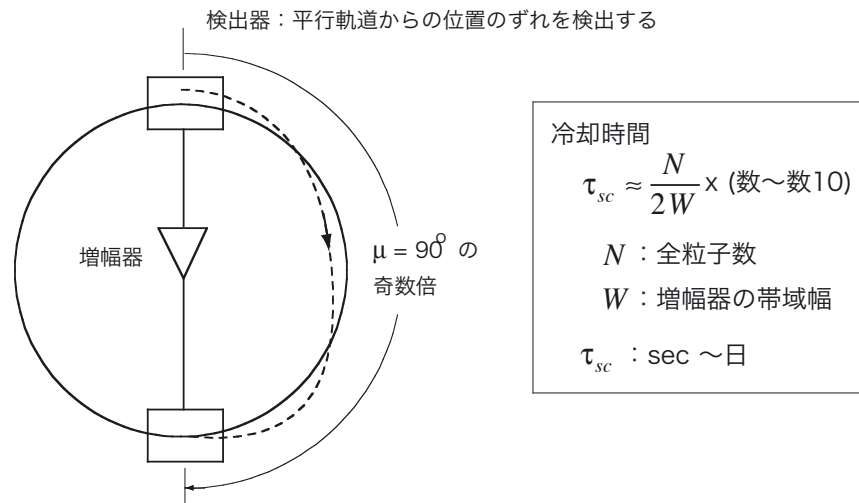
L_c : クーロン対数

η : イオンと電子の合流部分の長さとリングの周長の比

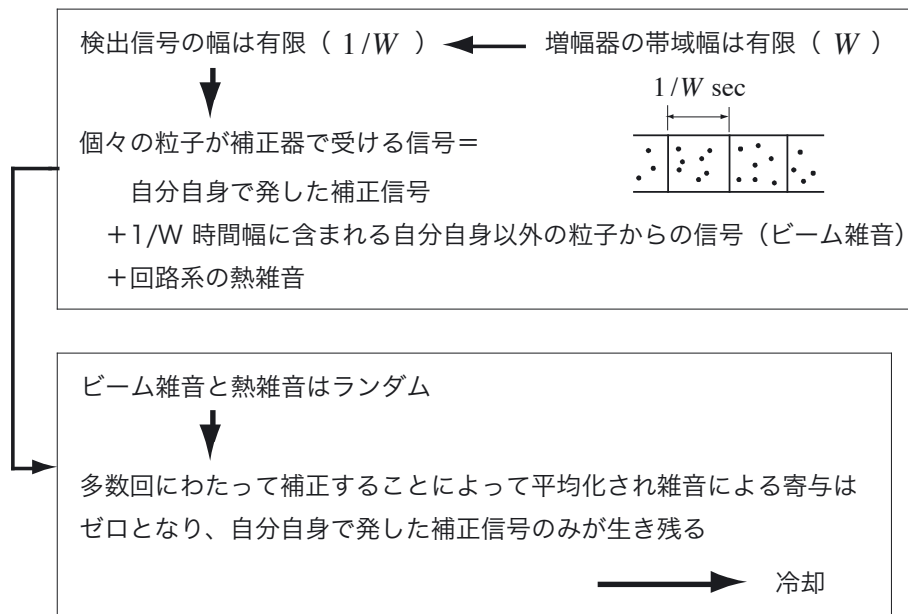
j_e : 電子ビームの電流密度

ビーム冷却（続き）

確率冷却（Stochastic cooling）



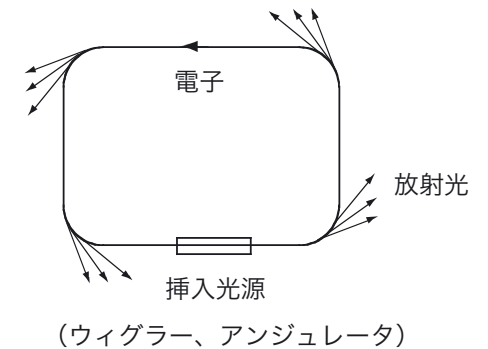
補正器（キッカー）：ずれに比例したキック力を加えて傾きを補正する



放射光（Synchrotron radiation）

電磁放射によって電子が1周当りに失うエネルギー

$$\Delta E [\text{keV}] = 88.5 \frac{E^4 [\text{GeV}^4]}{R [\text{m}]}$$



特徴

1. 指向性 （放射光ビーム束の角度広がり $\sim 2/\gamma$ ）
2. 短波長性

放射光によるエネルギー損失

Spring-8

$E = 8 \text{ GeV}$

$R = 229 \text{ m}$

$\Delta E = 1,585 \text{ keV}$

LEP （注：放射光施設ではない）

$E = 70 \text{ GeV}$

$R = 4,300 \text{ m}$

$\Delta E = 7.1 \times 10^5 \text{ keV}$

電磁石 (Magnet)

磁場の生成

一般に、鉄とコイルで生成

磁場の形状

Laplace 方程式で与えられる

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} = 0 & \longrightarrow \vec{B} = -\text{grad } \phi \\ & \downarrow \longleftarrow \text{div } \vec{B} = 0 \\ & \text{div}(\text{grad } \phi) = \Delta \phi = 0 \end{aligned}$$

電流のない磁極間隙では、磁場はスカラーポテンシャルを用いて表現できる

2次元磁場の多重極展開

開口に比べて長さが十分長いとする

円筒座標系

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \{ A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \}$$

$\uparrow$ "skew 成分" $\uparrow$ "normal 成分"

$2n$: 磁極の極数

通常は "normal 成分" を用いる

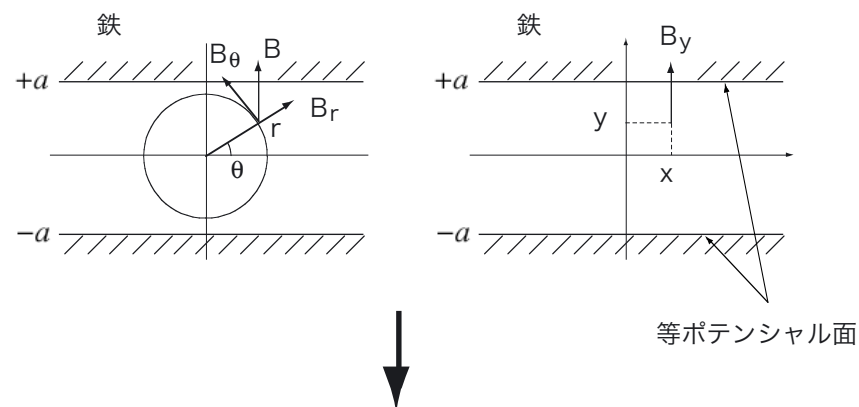
二重極磁石 (n = 1)

$$\phi = B_1 \frac{r}{a} \sin \theta \quad \text{または} \quad \phi = \frac{B_1}{a} y$$

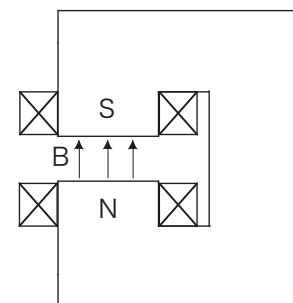
$$B_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{B_1}{a} \sin \theta \quad B_x = 0$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{B_1}{a} \cos \theta \quad B_y = -\frac{B_1}{a}$$

$$|B| = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} = \frac{|B_1|}{a}$$



等ポテンシャル面



四重極磁石 (n = 2)

$$\phi = B_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin 2\theta$$

または

$$\phi = \frac{B_2}{a^2} xy$$

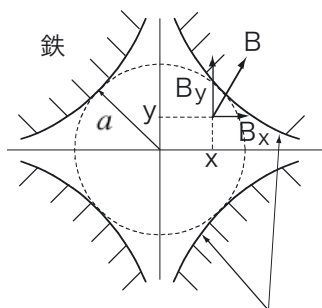
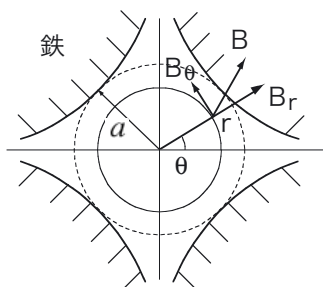
$$B_r = -2 \frac{B_2}{a^2} r \sin 2\theta$$

$$B_x = -2 \frac{B_2}{a^2} y$$

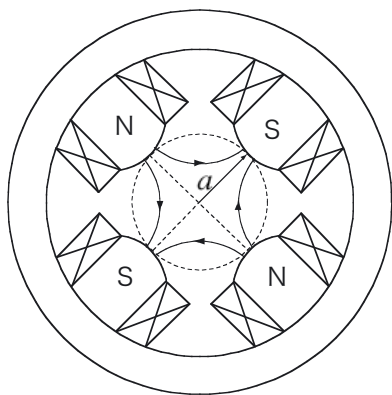
$$B_\theta = -2 \frac{B_2}{a^2} r \cos 2\theta$$

$$B_y = -2 \frac{B_2}{a^2} x$$

$$|B| = 2 \frac{|B_2|}{a^2} r$$



等ポテンシャル面



コイル電流と磁場の強さ (比透磁率 $\mu_r = \infty$ の場合)

Ampere の法則: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$

NI : 起磁力 (アンペアターン)

二重極磁石

$$H_G \times 2a + H_{iron} \times l_{iron} = NI$$

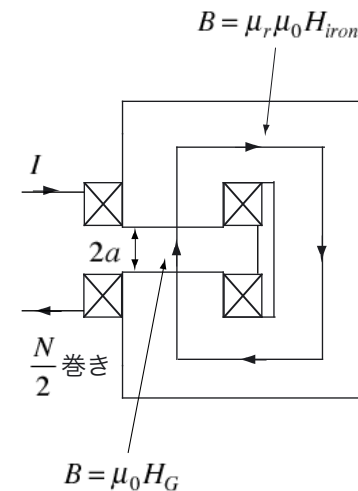
$$B = \mu_0 H_G$$

$$B = \mu_r \mu_0 H_{iron}$$

$$H_G = \frac{NI}{2a + \frac{l_{iron}}{\mu_r}} \cong \frac{NI}{2a} \quad (\text{A/m})$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2a} \quad (\text{T})$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad (\text{H/m})$$

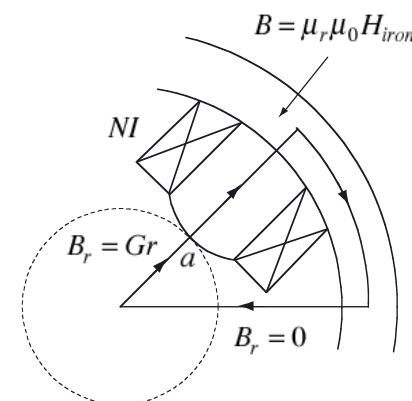


四重極磁石

$$\frac{Ga^2}{2\mu_0} + H_{iron} \times l_{iron} = NI$$

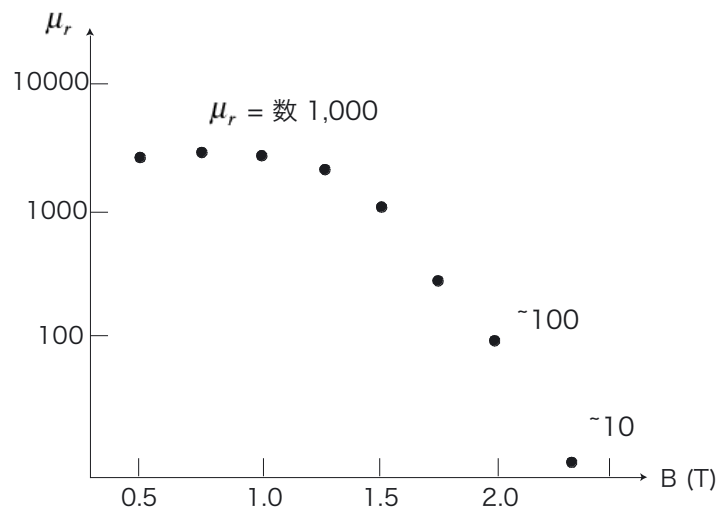
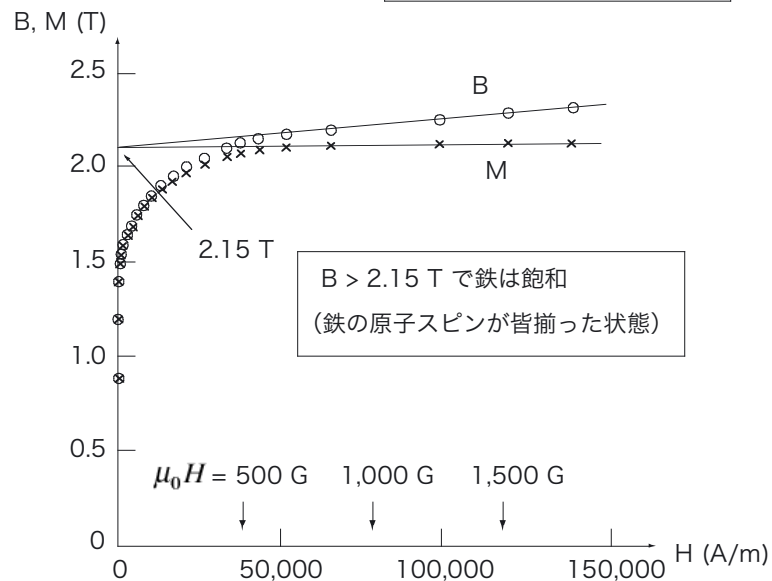
$$G = \frac{2\mu_0 NI}{a^2} \quad (\text{T/m})$$

$$\int_0^a \frac{Gr}{\mu_0} dr = \frac{Ga^2}{2\mu_0}$$



鉄の B-H 特性

B は H の非線形関数である



高磁場では磁石中の積分の寄与が無視できない

漏洩磁束と磁場分布

鉄心の側壁に磁荷が生じる

側壁から漏洩磁束が入ってくる

磁束密度が磁極間隙の面に垂直ではない

磁極間隙内の磁場分布が一様でなくなる (磁極間隙が一定でも)

$$\int_{PQRS} H_s ds = 0$$

$$\int_S^P H_s ds = \frac{B_0}{\mu_0} 2d$$

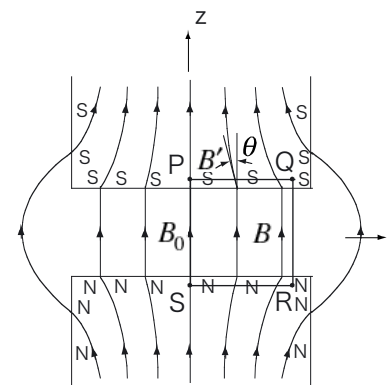
$$\int_Q^R H_s ds = -\frac{B}{\mu_0} 2d$$

$$\int_P^Q H_s ds \left(= \int_R^S H_s ds \right) = -\frac{1}{\mu_0} \int_0^r \frac{B' \sin \theta}{\mu_r} dr$$

$$= -\frac{B_z}{\mu_0} \int_0^r \frac{\tan \theta}{\mu_r} dr$$

$$\frac{B_0}{\mu_0} 2d - \frac{B}{\mu_0} 2d - 2 \frac{B_z}{\mu_0} \int_0^r \frac{\tan \theta}{\mu_r} dr = 0$$

$$\frac{B - B_0}{B_0} = -\frac{1}{d} \int_0^r \frac{\tan \theta}{\mu_r} dr$$



$$B_z = B' \cos \theta$$

B_z は r によらず一定
(実験から)

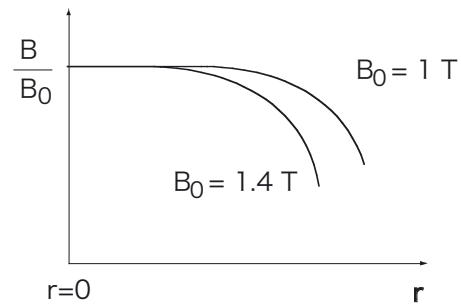
漏洩磁束と磁場分布（続き）

ロゴスキー（Rogowsky）カット

磁極端の断面形状が直角の場合は

鉄心のふちの近くで θ 大 $\rightarrow$ 鉄心のふちの近くで B' 大

例：ふちのところで $\theta = 45^\circ$ とすると、 $B = 1.4 \text{ T}$ のとき
ふちでは $B' = 2 \text{ T}$ となる（飽和）

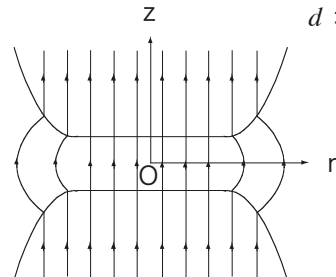


磁場分布が磁場レベル
によって変る

鉄心の中の磁束密度がすべて z 軸に平行に
なるようにする

$$\text{ロゴスキーカット： } z = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \exp\left(\frac{\pi r}{d}\right) \right)$$

d ：ギャップ長

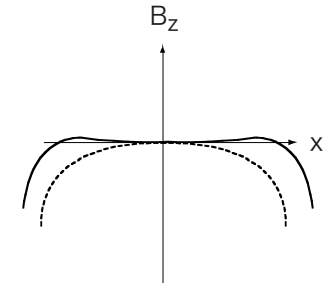


磁場分布が磁場レベル
によらず一定

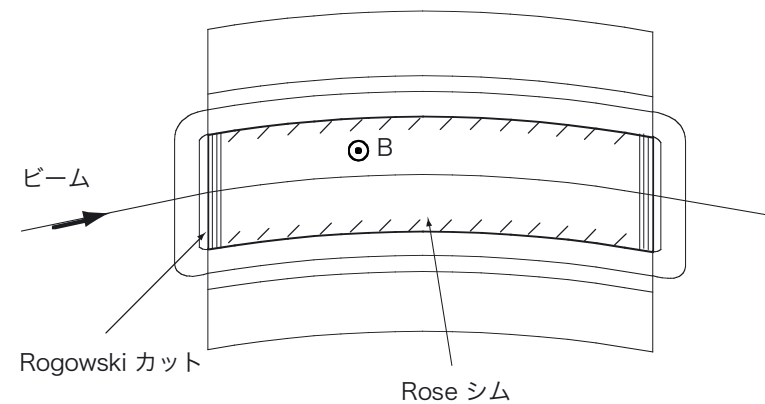
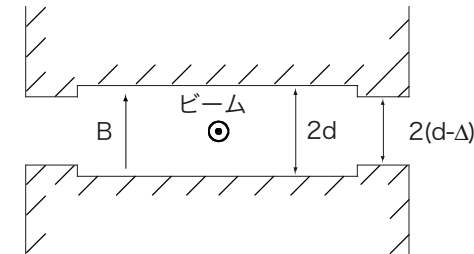
漏洩磁束と磁場分布（続き）

Rose シム

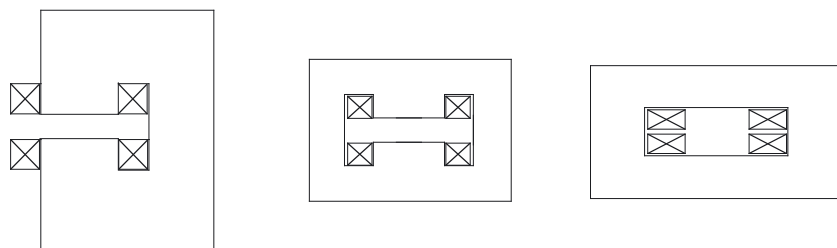
鉄心のふちの間隙距離を縮める



磁場レベルが高いとき、磁場分布の平坦部を広げる効果



二重極磁石の例



C 型

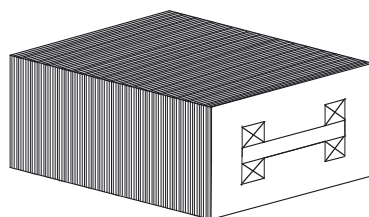
H 型

Window-frame 型

鉄は精度よく加工できる $\sim 0.1 \text{ mm}$
 ※ ギャップ距離の精度 $\sim 0.05 \text{ mm}$

AC 電磁石／パルス電磁石

うず電流を小さくするため
 たとえば厚さ 0.35 mm のケイ素鋼板を積層したもの



鋼板間は絶縁

電磁石の設計・製作

1. 基本パラメータの決定

磁石の長さ、幅、磁場の強さ等

2. 2次元または3次元磁場計算プログラムで計算

磁場分布、起磁力、鉄／コイルの断面形状

鉄（低炭素鋼：C 含有量 $< 0.1 \%$ ）の B-H 特性

3. コイルの巻数、サイズの決定

1) アンペアターン

2) コイルの断面積 $\leftarrow$ 電流密度 $< 5 \text{ A/mm}^2$
 Packing factor $< 50 \%$

3) 電流値 $\leftarrow$ $< 1,000 \text{ A}$

4) コイルの分割 ※ 冷却は複数に分岐させる

5) 水冷の計算

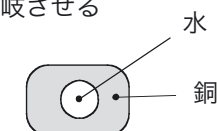
水冷のホローコンダクター

$\Delta T < 20 \sim 30 \text{ 度}$

流速 $\sim 5 \text{ m/s}$

圧損 $\sim 5 \text{ kg/cm}$

※ 1 kW 、 1 L/min $\Leftrightarrow \Delta T = 15 \text{ 度}$



4. コイルの製作

エポキシ真空含浸（コイルの表面は Kapton テープやガラスエポキシテープで巻いて絶縁をとる）

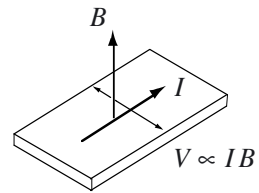
プリプレグ

磁場の測定方法

Hall プローブ

磁場と電流の両方に直角の方向に電圧 V が発生

測定精度 $\sim 10^{-4}$



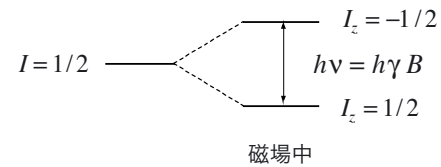
半導体

NMR プローブ

核磁気共鳴を利用

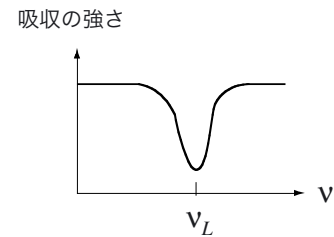
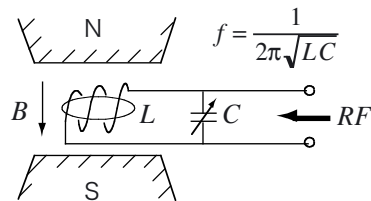
$$\nu = \gamma B$$

γ : 回転磁気比
(Gyromagnetic ratio)



$$\gamma = \begin{cases} 42.58 \text{ MHz/T} & (\text{陽子}) \\ 6.54 \text{ MHz/T} & (\text{重陽子}) \end{cases}$$

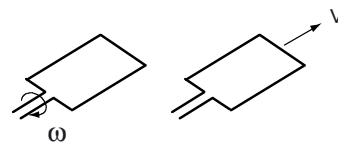
測定精度 $\sim 10^{-6}$



サーチコイル

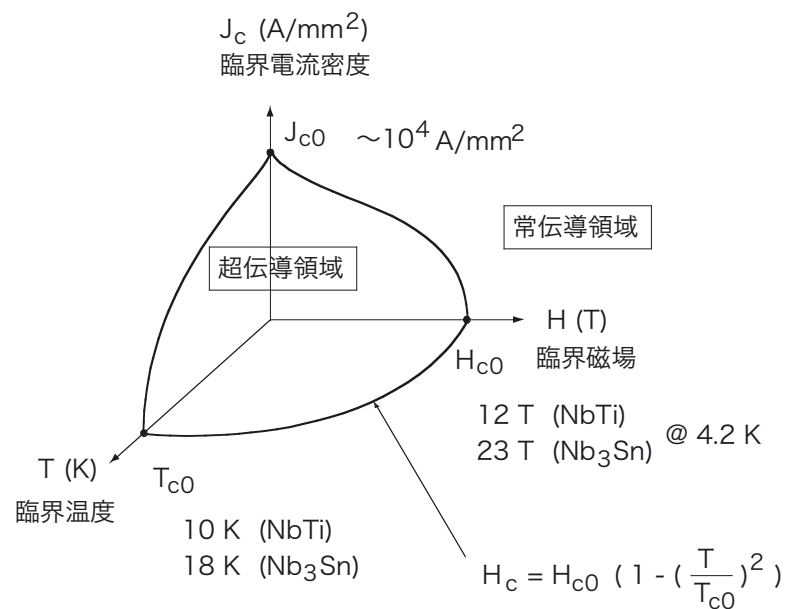
コイルを回転させたり移動させたりしたときのコイルを貫く磁束の変化によって誘起された電圧を時間積分して求める

測定精度 $10^{-3} \sim 10^{-4}$

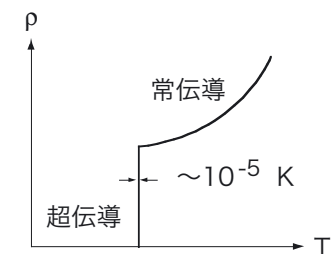


超伝導電磁石 (Superconducting magnet)

超伝導性を決める三つの条件 (臨界値)



抵抗の温度変化

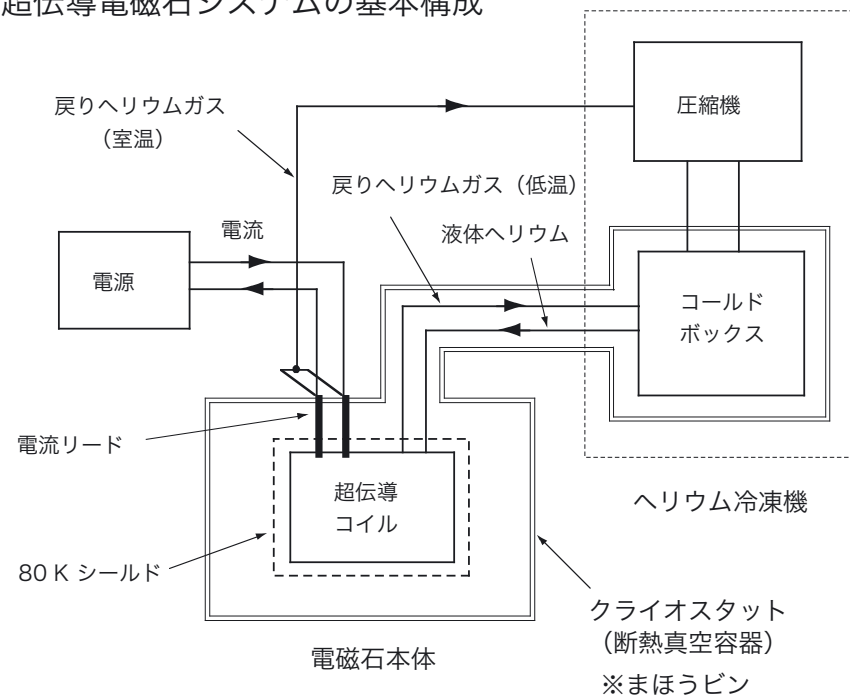


$\rho < 10^{-14}$ Ω m の状態を
超伝導と定義する

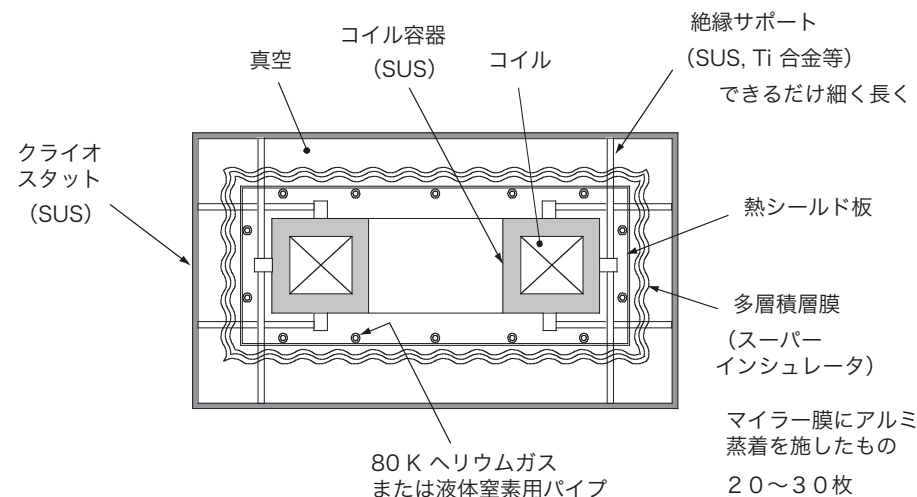
気体の沸点 (@大気圧)

O ₂	90 K
Ar	87 K
N ₂	77 K
Ne	27 K
H ₂	20 K
⁴ He	4.2 K
³ He	3.2 K

超伝導電磁石システムの基本構成



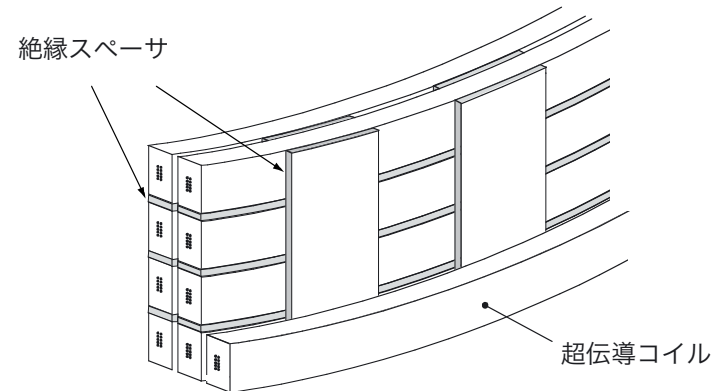
電磁石本体の構成 (断面概念図)



コイルの冷却方式

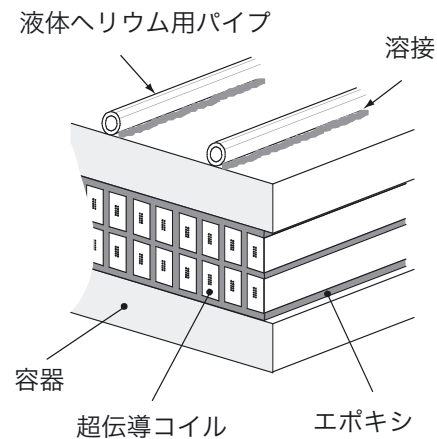
浸漬冷却：液体ヘリウム中にざぶ漬け

絶縁スペーサで液体ヘリウムの通路を確保



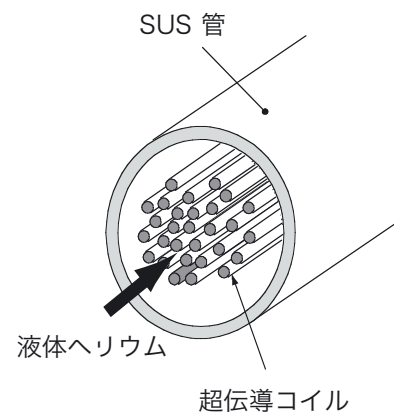
伝導冷却（間接冷却）：

コイルはエポキシ含浸
容器を液体ヘリウムで冷却

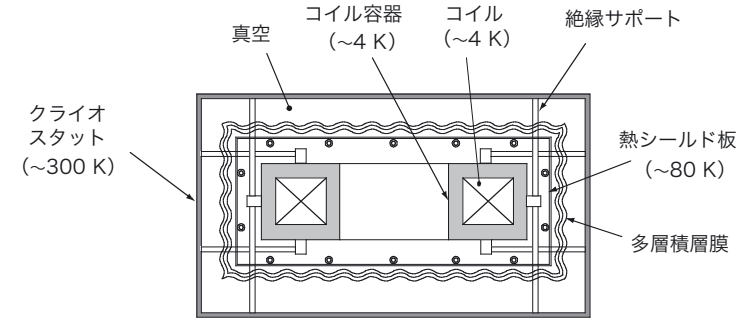


強制冷却：

CICC (Cable-in conduit coil)
またはホロー導体を使用



極低温部への入熱



熱輻射による入熱

$$Q_R = A\sigma\epsilon(T_2^4 - T_1^4) \quad [\text{W}]$$

A ：面積 $[\text{m}^2]$

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \quad [\text{W} / \text{m}^2 / \text{K}^4]$: Stefan-Boltzman 定数

ϵ ：放射率 (~ 0.1)

T_2 ：高温部の温度 $[\text{K}]$ (通常 $\sim 80 \text{ K}$)

T_1 ：低温部の温度 $[\text{K}]$ (通常 $\sim 4 \text{ K}$)

絶縁サポートの伝導による入熱

$$Q_S = \frac{A}{L} \int_{T_1}^{T_2} \kappa(T) dT = \frac{A}{L} \bar{\kappa} (T_2 - T_1)$$

L ：長さ $[\text{m}]$

κ ：熱伝導率 $[\text{W} / \text{m} / \text{K}]$ $\bar{\kappa}$ ：平均熱伝導率 $[\text{W} / \text{m} / \text{K}]$

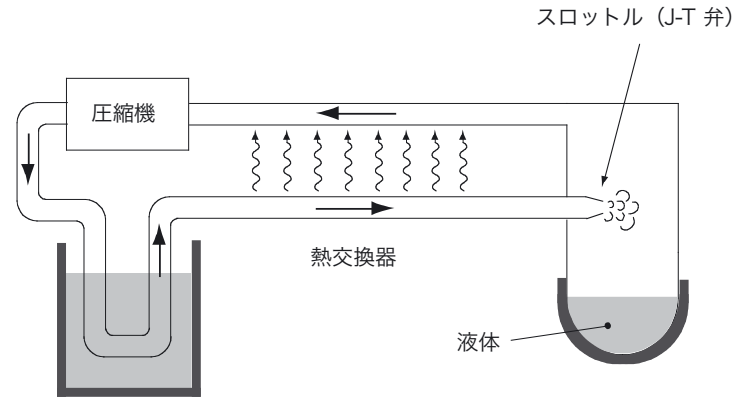
T_2 ：室温 $[\text{K}]$ ($\sim 300 \text{ K}$)

電流リード* からの入熱

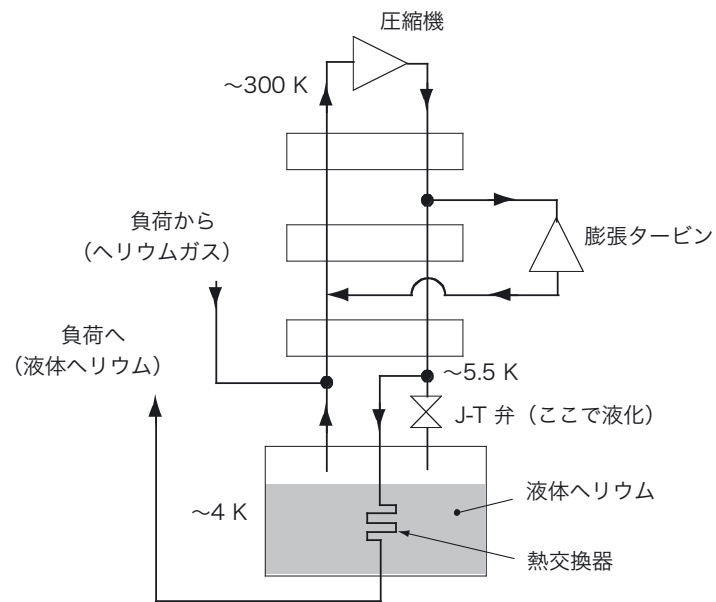
$\sim 1 \text{ W/kA}$

* 室温部の電流端子と極低温部のコイルを結ぶもの
(ヘリウムガスで冷却する)

ヘリウム冷凍機



液化の原理 (Hampson-Linde サイクル)



ヘリウム冷凍機概念図

等エンタルピー膨張

ガスが絞り弁を通過して膨張すれば、ガスの温度が変化する

$$\mu_{JT} \equiv \left(\frac{dT}{dp} \right)_H = \frac{1}{\rho c_p} (T\beta - 1)$$

β : 体積膨張係数

ρ : 密度

c_p : 定圧比熱

理想気体の場合 $T\beta = 1$

実在気体の場合 $T\beta \neq 1$

$\mu_{JT} = 0$ となる温度のことを逆転温度という

水素の場合 204 K @大気圧

ヘリウムの場合 43 K @大気圧

逆転温度以下では等エンタルピー膨張によって温度は下がる



ジュール・トムソン (J-T) 弁

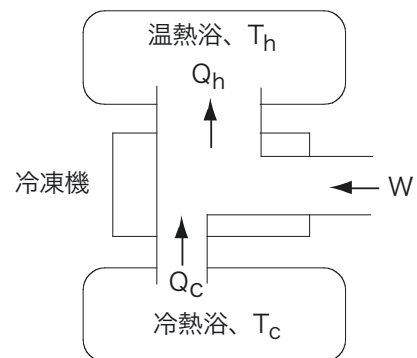
等エントロピー膨張

ガスが断熱的に系外に仕事をしながら膨張すれば、ガスの温度が下がる



膨張タービン

冷凍機の効率



成績係数 (COP: Coefficient of performance)

$$\begin{aligned} COP &= \frac{Q_c}{W} \\ &= \frac{Q_c}{Q_h - Q_c} \quad \leftarrow Q_h = Q_c + W \text{ (熱力学第1法則)} \\ &= \frac{1}{\frac{Q_h}{Q_c} - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_h}{T_h} &\geq \frac{Q_c}{T_c} \quad \leftarrow S_h \geq S_c \text{ (熱力学第2法則)} \\ \frac{Q_h}{Q_c} &\geq \frac{T_h}{T_c} \end{aligned}$$

S_h : 温熱浴に捨てられるエントロピー
 S_c : 冷熱浴から吸収されるエントロピー

$$\therefore COP \leq \frac{1}{\frac{T_h}{T_c} - 1} = \frac{T_c}{T_h - T_c} : \text{カルノーの最大効率} \quad (COP)_{\text{カルノー}}$$

$$T_h = 300 \text{ K}, T_c = 4 \text{ K} \text{ のとき、} (COP)_{\text{カルノー}} = 0.014$$



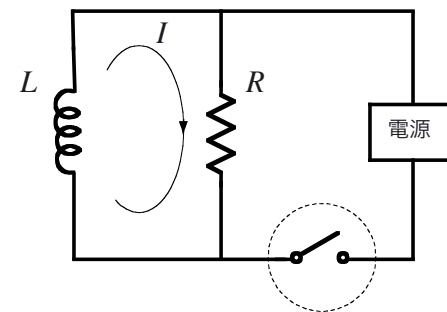
冷熱浴から 1 W の熱を汲み上げるのに最低限 70 W の仕事が必要
 実際には ~1000 W/W (70 W/W と表わす)

クエンチ保護

クエンチ時、電磁石に蓄えられているエネルギーを外付けの保護抵抗で消費させる

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$



クエンチ時に遮断

	コイルにかかる電圧	コイルの温度上昇
R 大	大	小
R 小	小	大

理研 SRC の場合

$$I_0 = 5,000 \text{ A}$$

$$R = 0.3 \Omega$$

$$L = 20 \text{ H}$$

$$V_{\max} = 1,500 \text{ V}$$

$$T_{\max} = 150 \text{ K}$$

$$\tau = 70 \text{ sec}$$

高周波 (Radio frequency, RF)

周波数、電圧

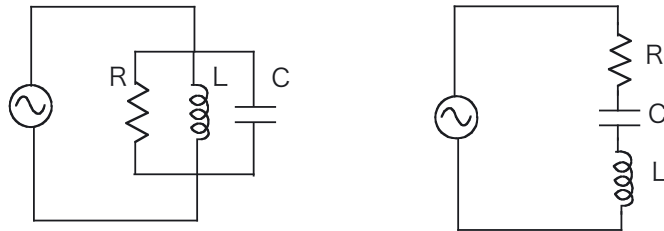
周波数：数 MHz ～ 数 GHz

電 圧：数 10 ～ 数 100 kV

共振回路

低周波で用いる交流回路（集中定数回路）は適用できない

理由： 共振周波数を大きくできない
電力損失が大きい



$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{または} \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



立体回路／分布定数回路を適用する

共振器 (Resonator)
空洞 (Cavity)

共振器／空洞

参考文献： 1) Classical Electrodynamics, J.D. Jackson,
John Wiley & Sons

2) 電磁気学の基礎 - 実験室における -、熊谷寛夫、裳華房

3) 物理学選書 3 電磁気学、高橋秀俊、裳華房

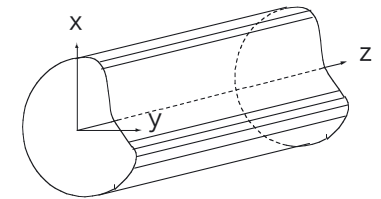
導波管の両端を電磁波が完全に反射するような平面でふさぐ

→ 管内を進む波は反射されて定在波を作る

導波管の中を伝わる進行波

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y) e^{j(\omega t - k_g z)}$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}_0(x, y) e^{j(\omega t - k_g z)}$$



Maxwell 方程式

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{H} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} j\omega\epsilon E_{0z} &= \frac{\partial H_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{0x}}{\partial y} \\ j\omega\epsilon E_{0x} &= \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} + jk_g H_{0y} \\ j\omega\epsilon E_{0y} &= -jk_g H_{0x} - \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} -j\omega\mu H_{0z} &= \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \\ -j\omega\mu H_{0x} &= \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} + jk_g E_{0y} \\ -j\omega\mu H_{0y} &= -jk_g E_{0x} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} - jk_g E_{0z} &= 0 \\ \frac{\partial H_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial H_{0y}}{\partial y} - jk_g H_{0z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

導波管の中を伝わる進行波（続き）

式（１）の第２、３番目の式および式（２）の第２、３番目の式より

$$E_{0x} = \frac{-j}{k_c^2} (\omega\mu \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} + k_g \frac{\partial E_{0z}}{\partial x})$$

$$E_{0y} = \frac{j}{k_c^2} (\omega\mu \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} - k_g \frac{\partial E_{0z}}{\partial y})$$

$$H_{0x} = \frac{-j}{k_c^2} (k_g \frac{\partial H_{0z}}{\partial x} - \omega\epsilon \frac{\partial E_{0z}}{\partial y})$$

$$H_{0y} = \frac{-j}{k_c^2} (k_g \frac{\partial H_{0z}}{\partial y} + \omega\epsilon \frac{\partial E_{0z}}{\partial x})$$

ただし、 $k_c^2 = \omega^2 \epsilon \mu - k_g^2$

E_{0z} および H_{0z} が決まれば
その他の成分もすべて決まる

E_{0z} および H_{0z} を与える式は上式を式（１）、（２）の第１番目の式
または式（３）に代入して得られる

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2) E_{0z} = 0$$

$$\gamma^2 \equiv k_c^2 = \omega^2 \epsilon \mu - k_g^2$$

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2) H_{0z} = 0$$

$$k_c^2 = \omega^2 \epsilon \mu - k_g^2 = k^2 - k_g^2$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}, \quad k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$$

$$\longrightarrow \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2$$

λ : 自由空間での波長

λ_g : 管内波長

λ_c : 遮断波長 (cutoff wavelength)

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} \quad \text{: 遮断周波数 (cutoff frequency)}$$

これより低い周波数の波は導波管を伝わらない

導波管の中を伝わる進行波（続き）

E_{0z} と H_{0z} が別々の方程式できまるため、２つのタイプのモードの解が存在する

TE モード : どの点でも $E_{0z} = 0$ ($H_{0z} \neq 0$)、境界条件 $\frac{\partial H_{0z}}{\partial n} \Big|_S = 0$

xy 平面内での導体面の接線方向の E の成分が 0 $\uparrow$

TM モード : どの点でも $H_{0z} = 0$ ($E_{0z} \neq 0$)、境界条件 $E_{0z} \Big|_S = 0$

S : 導体表面

n : 面 S の法線

ここで、 E_{0z} および H_{0z} を ψ で表すと次のように書ける

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2) \psi = 0$$

$$\gamma^2 = \omega^2 \epsilon \mu - k_g^2$$

TE モード : $\psi = H_{0z}$ 、境界条件 $\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_S = 0$

TM モード : $\psi = E_{0z}$ 、境界条件 $\psi \Big|_S = 0$

矩形導波管

TE モード

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2)\psi = 0$$

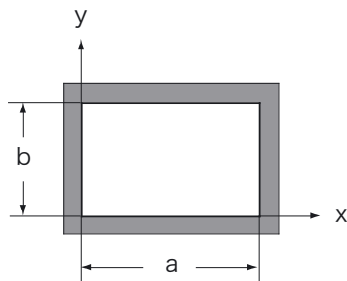
$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{at } x=0, a, \\ y=0, b$$

$$\psi_{mn}(x, y) = H_0 \cos(\frac{m\pi x}{a}) \cos(\frac{n\pi y}{b})$$

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2 (\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})$$

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} (\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} \quad : \text{遮断周波数}$$



$a > b$ のときの最低次モード : $m = 1, n = 0 \longrightarrow$

TE₁₀ モード

$$\omega_{10} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon} a}$$

$$\lambda_{10} = 2a$$

$$H_z = H_0 \cos(\frac{\pi x}{a}) e^{j(\omega t - k_g z)}$$

$$H_x = -\frac{jk_g a}{\pi} H_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) e^{j(\omega t - k_g z)}$$

$$E_y = \frac{j\omega a \mu}{\pi c} H_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) e^{j(\omega t - k_g z)}$$

※ 円形導波管は省略

定在波

導波管の両端を板でふさぐ



$e^{+jk_g z}$ の波と $e^{-jk_g z}$ の波の重ね合わせで定在波が立つ

$$\begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = \psi (A \sin k_g z + B \cos k_g z)$$



$z = 0, d$ での境界条件

$$k_g = p \frac{\pi}{d} \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

TM モード

$$E_t|_{z=0,d} = 0$$

※ 添字 t : x, y 方向を意味する

$$E_z = \psi(x, y) \cos(\frac{p\pi z}{d}), \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

$$\vec{E}_t = -\frac{p\pi}{d\gamma^2} \sin(\frac{p\pi z}{d}) \text{grad}_t \psi$$

$$\vec{H}_t = \frac{j\epsilon\omega}{\gamma^2} \cos(\frac{p\pi z}{d}) \vec{e}_z \times \text{grad}_t \psi$$

TE モード

$$H_z|_{z=0,d} = 0$$

$$H_z = \psi(x, y) \sin(\frac{p\pi z}{d}), \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

$$\vec{E}_t = -\frac{j\mu\omega}{\gamma^2} \sin(\frac{p\pi z}{d}) \vec{e}_z \times \text{grad}_t \psi$$

$$\vec{H}_t = \frac{p\pi}{d\gamma^2} \cos(\frac{p\pi z}{d}) \text{grad}_t \psi$$

定在波（続き）

固有値問題を解けばよい

$$\gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2 - \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2$$

$$\omega_{mnp}^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \left[\gamma_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \right] \quad f_{mnp} = \frac{\omega_{mnp}}{2\pi} : \text{共振周波数}$$

矩形共振器

ψ に関する方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right)\psi = 0$$

TE モード

$$\psi_{mn} = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \leftarrow x=0, a \text{ および } y=0, b \text{ で}$$

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

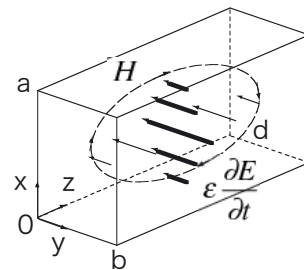
$$\omega_{mnp} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

最低次の TE モード

$$\omega_{101} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) e^{-j\omega t}$$

$$E_y = j \frac{\omega a \mu}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) e^{-j\omega t}$$



TE₁₀₁モード

※TM モードは省略

円形共振器

ψ に関する方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \gamma^2\right)\psi = 0$$

TM モード

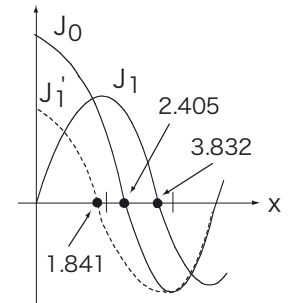
$$\psi(\rho, \phi) = E_0 J_m\left(\frac{x_{mn}}{R} \rho\right) e^{\pm im\phi}$$

$$x_{mn} : J_m(x) = 0 \text{ の } n\text{番目の根} \quad \leftarrow \psi|_{\rho=R} = 0$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{x_{mn}^2}{R^2} + \frac{p^2 \pi^2}{d^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$



ベッセル関数の根

最低次の TM モード

$$m = 0, n = 1, p = 0 \quad \rightarrow$$

TM₀₁₀

$$\omega_{010} = \frac{2.405}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{R}$$

$$E_z = E_0 J_0\left(\frac{2.405 \rho}{R}\right) e^{-j\omega t}$$

$$H_\phi = -j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 J_1\left(\frac{2.405 \rho}{R}\right) e^{-j\omega t}$$

$$E_\rho = E_\phi = 0$$

$$H_\rho = H_z = 0$$

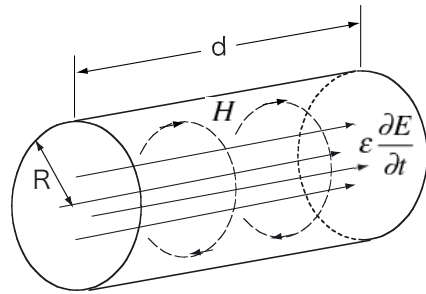
管内波長 = ∞



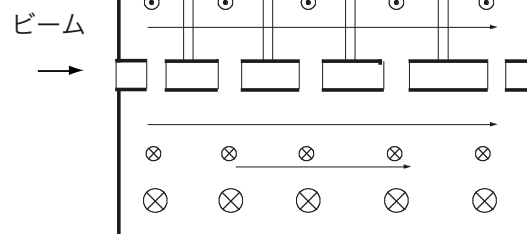
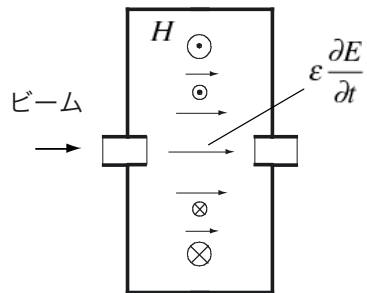
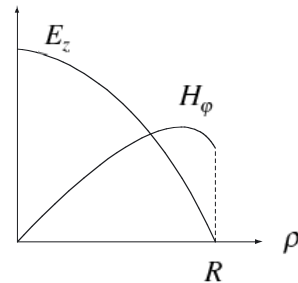
共振周波数は長さ d によらない

円形共振器（続き）

TM₀₁₀ 共振器



TM₀₁₀モード



アルバレ型ライナック

円形共振器（続き）

TE モード

$$\psi(\rho, \varphi) = H_0 J_m \left(\frac{x'_{mn}}{R} \rho \right) e^{\pm im\varphi}$$

$$x'_{mn} : J'_m(x) = 0 \text{ の } n \text{ 番目の根} \quad \leftarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\rho=R} = 0$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{x'^2_{mn}}{R^2} + \frac{p^2\pi^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

最低次の TE モード

$$J'_1(x) = 0 \text{ の } 1 \text{ 番目の根が最小}$$

$$m = 1, n = 1, p = 1 \quad \longrightarrow$$

TE₁₁₁

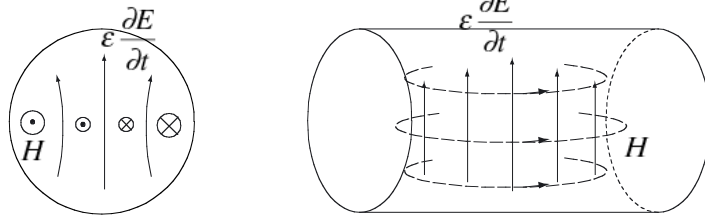
$$\omega_{111} = \frac{1.841}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{R} \left(1 + 2.912 \frac{R^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$H_z = H_0 J_1 \left(\frac{1.841 \rho}{R} \right) \cos \varphi \sin \left(\frac{\pi z}{d} \right) e^{-j\omega t}$$

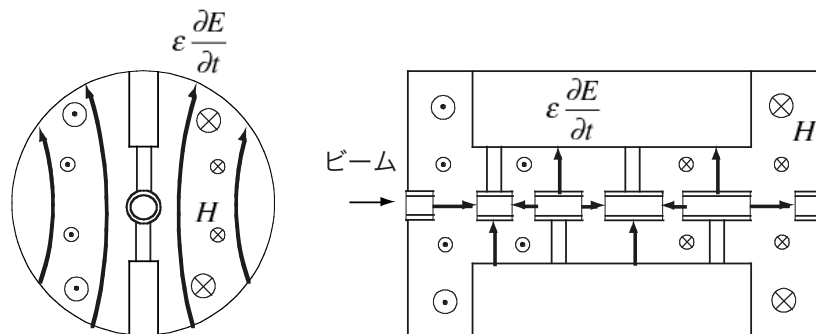
$$E_z = 0$$

円形共振器（続き）

TE₁₁₁ 共振器



TE₁₁₁ モード



インターデジタル H 型 (IH 型) ライナック

その他の共振器

TEM モード

$\vec{E}$, $\vec{H}$ の両方とも z に直角 ($E_{0z} = H_{0z} = 0$) であるモード

式 (1)、(2) に $E_{0z} = 0$, $H_{0z} = 0$ を代入すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\Psi) = 0 \longrightarrow \Psi, \Phi : 2 \text{次元静電問題の解}$$

$$E_{0x}, E_{0y}, H_{0x}, H_{0y} \Leftarrow \Psi, \Phi$$

内壁表面は等ポテンシャル

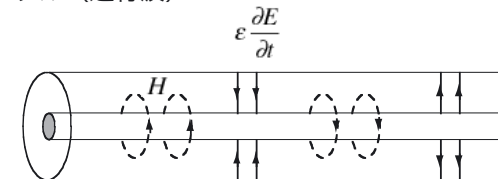
$$\longrightarrow \Psi, \Phi (\text{内部}) = 0$$

$\longrightarrow$ 導波管では TEM モードは存在しない

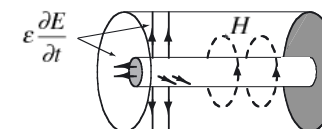
TEM モードが存在するためには内部に筒状表面が必要

$$\text{また、} k_g^2 = \mu \epsilon \omega^2 \longrightarrow \text{波の進行速度} = \text{光速}$$

例：同軸ケーブル（進行波）

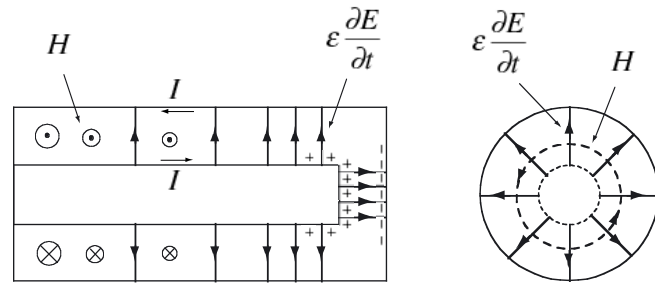


$\lambda/4$ 同軸型共振器（定在波）

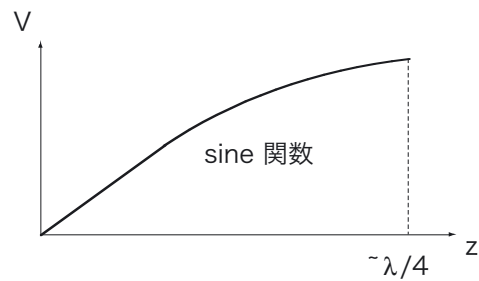


λ/4 同軸型共振器

サイクロトロン共振器で多用



TEM モード

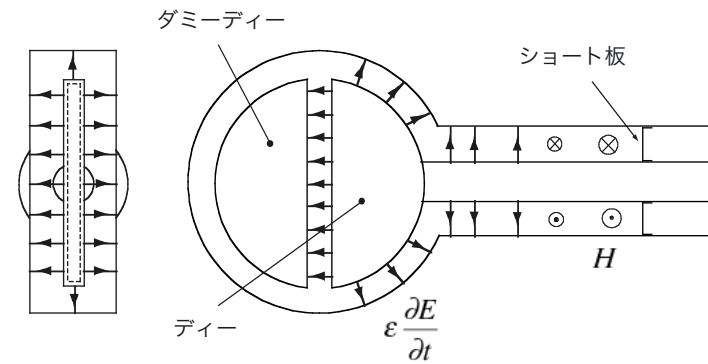


管内波長 = 自由空間の波長

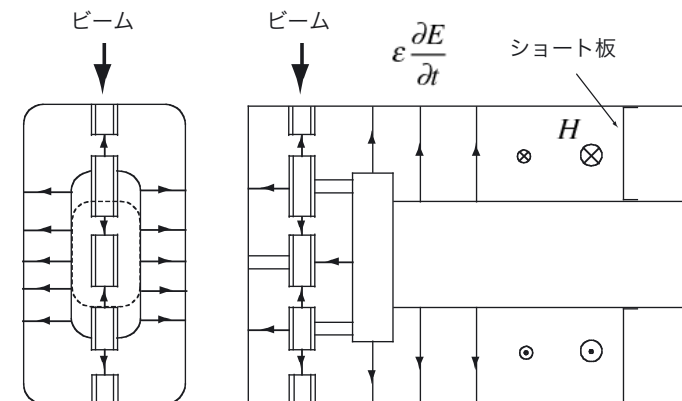
例：f = 100 MHz のとき、λ = 3 m → λ/4 ≅ 75 cm

λ/4 同軸型共振器（続き）

ショート板可動 ↔ 周波数可変



サイクロトロン共振器



ヴァンドレー型ライナック

共振器の特徴的なパラメータ

1. 共振周波数 (Resonant frequency)

2. Q 値 (Q value)

$$Q = \frac{\omega W}{P} \quad \left(= 2\pi \frac{W}{P \frac{1}{f}} \right)$$

$f (= \frac{\omega}{2\pi})$: 共振周波数

W : 共振器に蓄えられている全エネルギー

P : 共振器の内壁による電力損失

$(P \frac{1}{f})$: 共振器の内壁による 1 サイクル当りのエネルギー損失)

$$W = \int_V \left(\frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right) dv$$

$$P = \int_S \frac{1}{\sigma \delta} i^2 dS$$

σ : 導体の導電率

δ : 表皮の厚さ (skin depth)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}}$$

Q 大 $\longrightarrow$ P 小

良い共振器

銅の場合

$$\delta (\mu m) = \frac{70}{\sqrt{f (MHz)}}$$

$f (MHz)$ $\delta (\mu m)$

10 22

50 10

100 7

※ サイクロトロン用のもの : 数 1,000 ~ 数 10,000

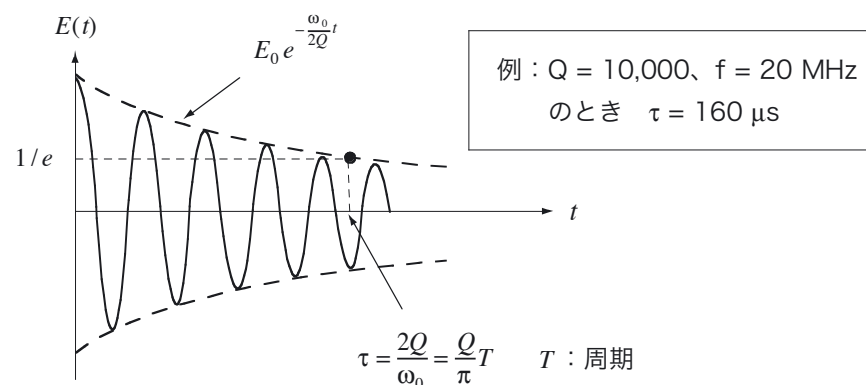
共振器の特徴的なパラメータ (続き)

減衰振動と Q 値

$$\frac{dW}{dt} (= -P) = -\frac{\omega_0}{Q} W$$

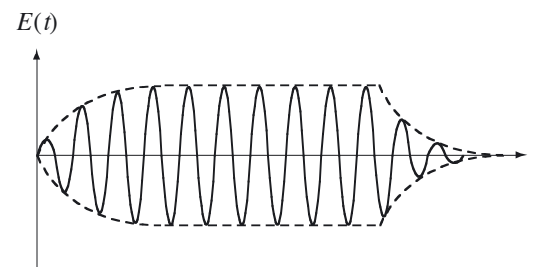
$$W(t) = W_0 e^{-\frac{\omega_0}{Q} t}$$

電場 $E(t) \propto \sqrt{W(t)} e^{-j\omega_0 t} \longrightarrow E(t) = E_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} e^{-j\omega_0 t}$



共振器の電圧の減衰を測定すれば Q 値が求まる

電場の立上がり時も同様



共振器の特徴的なパラメータ（続き）

電場の強さの周波数依存性と Q 値

減衰振動は純粋な振動数を持たずに、 ω_0 のまわりの振動数の重畳で与えられる

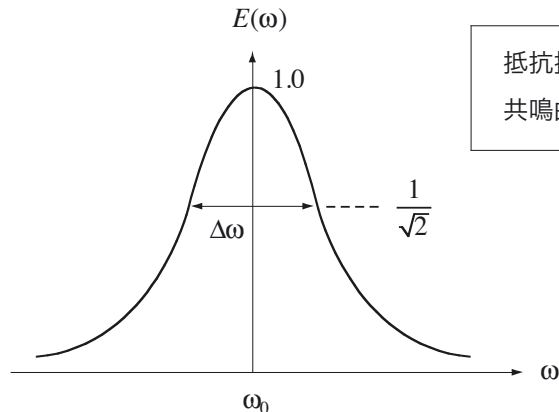
$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} e^{-j\omega_0 t}$$

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} e^{j(\omega - \omega_0)t} dt$$

$$\propto \sqrt{\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$



抵抗損失があるために
共鳴曲線分布が幅を持つ

共振器の特徴的なパラメータ（続き）

TM₀₁₀ 共振器の Q 値

電場、磁場成分 $E_z = E_0 J_0\left(\frac{2.405 \rho}{R}\right) e^{-j\omega t}$
 $H_\phi = -j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 J_1\left(\frac{2.405 \rho}{R}\right) e^{-j\omega t}$
 その他の成分 = 0

$$\begin{aligned} W &= \int_V \left(\frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right) dv \\ &= \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \int_0^d \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[J_0\left(\frac{2.405 \rho}{R}\right) \right]^2 \rho d\rho d\phi dz \\ &= \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \pi R^2 d [J_1(2.405)]^2 \end{aligned}$$

$$\left(\int x J_0^2(\alpha x) dx = \frac{1}{2} x^2 \{ J_0^2(\alpha x) + J_1^2(\alpha x) \} \right)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\sigma\delta} \left\{ 2 \times 2\pi \frac{\epsilon}{\mu} E_0^2 \int_0^R \left[J_1\left(\frac{2.405 \rho}{R}\right) \right]^2 \rho d\rho \right. \\ &\quad \left. + 2\pi R d \frac{\epsilon}{\mu} E_0^2 [J_1(2.405)]^2 \right\} \\ &= \frac{\pi R(R+d)}{\sigma\delta} \frac{\epsilon}{\mu} E_0^2 [J_1(2.405)]^2 \end{aligned}$$

$$\left(\int x J_1^2(\alpha x) dx = \frac{1}{2} x^2 \{ J_0^2(\alpha x) + J_1^2(\alpha x) \} - \frac{1}{\alpha} x J_0(\alpha x) J_1(\alpha x) \right)$$

$$Q = \frac{\omega W}{P} = \frac{Rd}{\delta(R+d)}$$

共振器の特徴的なパラメータ（続き）

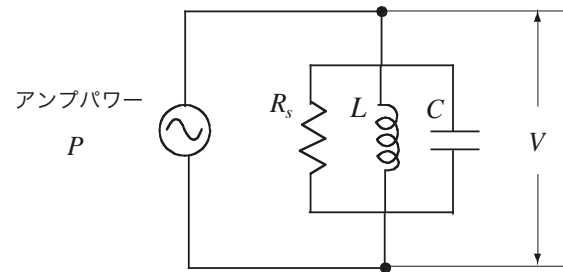
3. シャントインピーダンス (Shunt impedance)

$$R_s = \frac{V^2}{2P}$$

R_s : シャントインピーダンス

P : 消費電力

$$V = \int_{\text{beam path}} |E_z| dz \quad : \text{加速電圧}$$

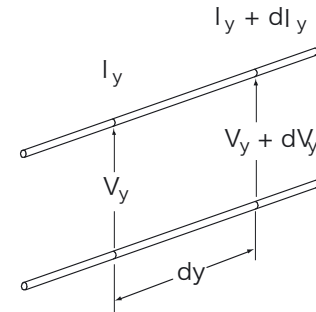
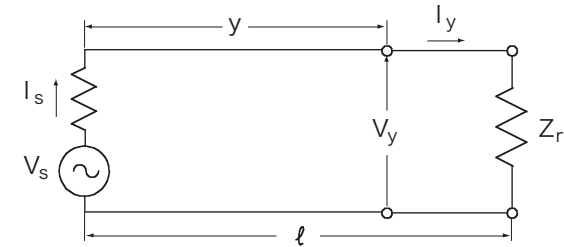


R_s を用いて共振器を集中定数回路で表わす

R_s 大 $\rightarrow$ P 小
良い共振器

分布定数回路

平行導線（レッヘル線）
同軸ケーブル } $\leftarrow$ 全く同等に取り扱える



L : 両線単位長さ当りの往復電流に対するインダクタンス

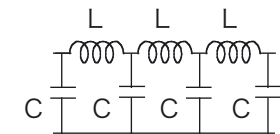
C : 両線間の単位長さ当りのキャパシタンス

※ 線の抵抗をゼロとする

線路方程式

$$\begin{cases} (V_y + dV_y) - V_y = -L dy \frac{\partial I_y}{\partial t} \\ (I_y + dI_y) - I_y = -C dy \frac{\partial V_y}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dV_y}{dy} = -L \frac{\partial I_y}{\partial t} \\ \frac{dI_y}{dy} = -C \frac{\partial V_y}{\partial t} \end{cases}$$



分布定数回路

線路方程式（続き）

$$\begin{cases} \frac{dV_y}{dy} = -j\omega L I_y \\ \frac{dI_y}{dy} = -j\omega C V_y \end{cases} \quad \left(\because I_y, V_y \propto e^{j\omega t} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 V_y}{dy^2} = -\omega^2 LC V_y \\ \frac{d^2 I_y}{dy^2} = -\omega^2 LC I_y \end{cases} \quad : \text{波動方程式}$$

$$\begin{cases} V_y = A e^{-j\beta y} + B e^{j\beta y} \\ I_y = A' e^{-j\beta y} + B' e^{j\beta y} \end{cases} \quad (\beta^2 = \omega^2 LC)$$

$y=0$ において $V_y = V_s, I_y = I_s$ とすると

$$\begin{cases} V_y = \cos \beta y \cdot V_s - jZ_0 \sin \beta y \cdot I_s \\ I_y = -j \frac{1}{Z_0} \sin \beta y \cdot V_s + \cos \beta y \cdot I_s \end{cases} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} : \text{特性インピーダンス}$$

$$\begin{pmatrix} V_y \\ I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta y & -jZ_0 \sin \beta y \\ -j \frac{1}{Z_0} \sin \beta y & \cos \beta y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s \\ I_s \end{pmatrix}$$

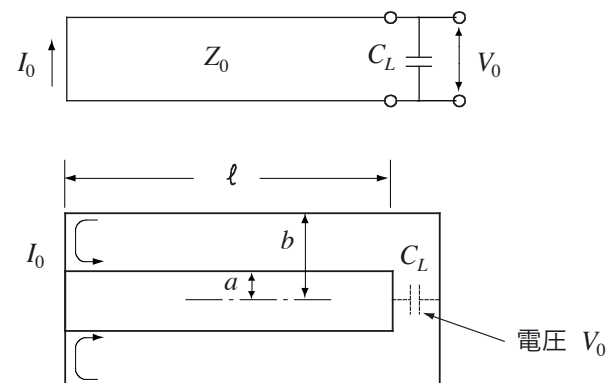
$y=\ell$ のとき $V_y = V_r, I_y = I_r$ とおくと

$$\begin{pmatrix} V_r \\ I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \ell & -jZ_0 \sin \beta \ell \\ -j \frac{1}{Z_0} \sin \beta \ell & \cos \beta \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s \\ I_s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_s \\ I_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \ell & jZ_0 \sin \beta \ell \\ j \frac{1}{Z_0} \sin \beta \ell & \cos \beta \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_r \\ I_r \end{pmatrix} \quad : \text{線路方程式}$$

$\lambda/4$ 同軸型共振器の設計

共振周波数と長さ



終端に C_L があるときの線路方程式

$$\begin{pmatrix} 0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \ell & jZ_0 \sin \beta \ell \\ j \frac{1}{Z_0} \sin \beta \ell & \cos \beta \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tan \beta \ell = \frac{1}{\omega C_L Z_0}$$

または

$$\tan \frac{\omega}{v} \ell = \frac{1}{\omega C_L Z_0}$$

C_L の存在によって ℓ が短くなる $\longrightarrow$ 波長短縮

ここで

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a} = 60 \ln \frac{b}{a} \quad [\Omega]$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \quad (\text{光速})$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

λ/4 同軸型共振器の設計（続き）

Q 値

$$Q = \frac{\omega W}{P_c + P_s}$$

蓄積エネルギー W

$$\begin{aligned} dW &= \frac{\mu_0}{2} H^2 dV \\ &= \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r dr dz \end{aligned}$$

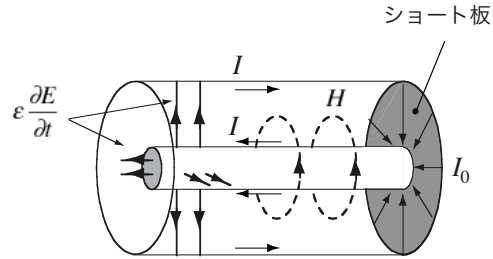
$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0^2 \ln \frac{b}{a} \int_0^\ell \cos^2 \beta z dz$$

同軸部の電力損失 P_c

$$\begin{aligned} dP_c &= \frac{1}{2} I^2 \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{2\pi a \delta} + \frac{1}{2\pi b \delta} \right) dz \\ P_c &= \frac{I_0^2}{4\pi \sigma \delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \int_0^\ell \cos^2 \beta z dz \end{aligned}$$

シヨート板の電力損失 P_s

$$\begin{aligned} dP_s &= \frac{I_0^2}{2} \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{2\pi r \delta} \\ P_s &= \frac{I_0^2}{4\pi \sigma \delta} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{I}{2\pi r}, \quad H_r = H_z = 0 \\ I &= I_0 \cos \beta z \end{aligned}$$

λ/4 同軸型共振器の設計（続き）

電流密度

内筒とシヨート板が接する点で最大となる

$$I_0 = \left| \left(j \frac{1}{Z_0} \sin \beta \ell + j \omega C_L \cos \beta \ell \right) \right| V_0$$

$$i_{\max} = \frac{I_0}{2\pi a} \quad (\text{最大電流密度})$$

シャントインピーダンス

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{V_0^2}{2(P_c + P_s)} \\ &= \frac{\left(\frac{I_0 Z_0}{\sin \beta} \right)^2}{2 \left\{ \frac{I_0^2}{4\pi \sigma \delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \int_0^\ell \cos^2 \beta z dz + \frac{I_0^2}{4\pi \sigma \delta} \ln \frac{b}{a} \right\}} \\ &= \frac{2\pi \sigma \delta Z_0^2}{\sin^2 \beta \ell \left\{ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4\beta} \right) + \ln \frac{b}{a} \right\}} \end{aligned}$$