

ANALYSIS OF HELICAL QUADRUPOLE FOCUSING CHANNEL

A. Morita* and Y. Iwashita

Accelerator Laboratory, Nuclear Science Research Facility,
Institute for Chemical Research, Kyoto University,
Gokanoshō, Uji, Kyoto 611, Japan

Abstract

It is said that the focusing power of the helical quadrupole channel would be strong compared with usual FODO channel. Usually the helical quadrupole is treated as the combination of rotated quadrupole blocks. For accurate analysis, use of the magnetic field distribution which satisfies the Maxwell equation is needed. We obtained the analytic solution of the helical quadrupole under the paraxial approximation, and compared the beam size with FODO lattice.

ヘリカル四重極収束系の解析

1 はじめに

ヘリカル四重極収束系の収束力は通常の FODO 収束系に比べて強いといわれている。従来は四重極磁石が単に回転しながら並んでいるものとして取り扱われていることが多いが、これを正確に解析するためには Maxwell 方程式を満たす磁場分布から始める必要がある。これについての解析を行なう。

2 ヘリカル四重極磁場

Maxwell 方程式を満たすヘリカル四重極磁場は、電流の無い内部領域では円柱座標系で変形 Bessel 関数を用いて

$$\Phi(r, \theta, z) = \frac{\Phi_0}{k} I_2(kr) \sin(2\theta - kz) \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = -\nabla\Phi \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 k は L を磁場の周期¹として $\frac{2\pi}{L}$ である。円柱座標系での磁場成分表示の具体的表式

$$B_r(r, \theta, z) = -\Phi_0 I_2'(kr) \sin(2\theta - kz) \quad (3)$$

$$B_\theta(r, \theta, z) = -2\Phi_0 \frac{I_2(kr)}{kr} \cos(2\theta - kz) \quad (4)$$

$$B_z(r, \theta, z) = \Phi_0 I_2(kr) \cos(2\theta - kz) \quad (5)$$

を r についてテーラー展開すると以下が得られる。

$$B_r = \frac{\Phi_0}{4} \left(kr + \frac{(kr)^3}{6} + O(r^5) \right) \sin(2\theta - kz) \quad (6)$$

$$B_\theta = -\frac{\Phi_0}{4} \left(kr + \frac{(kr)^3}{12} + O(r^5) \right) \cos(2\theta - kz) \quad (7)$$

$$B_z = \frac{\Phi_0}{8} \left((kr)^2 + \frac{(kr)^4}{12} + O(r^6) \right) \cos(2\theta - kz) \quad (8)$$

* A. Morita, 0774-38-3282, morita@kyticr.kuicr.kyoto-u.ac.jp

¹ 磁極の周期は $2L$

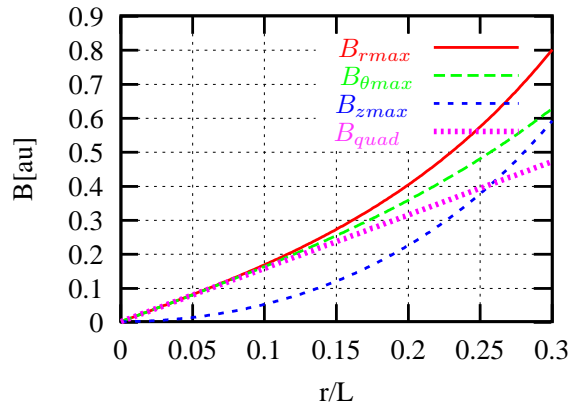


図1: ヘリカル四重極磁場成分 B_r, B_θ, B_z の r 依存性

図.1 にヘリカル四重極磁場の各成分と純粋な四重極場の r 依存性を示す。図.1 や r の展開形から分かる通り、中心軸近傍では $\frac{kz}{2}$ 回転した四重極磁場そのものになっている。中心軸近傍での線形近似が良く成り立つには、四重極磁場からのずれに当たる B_r, B_θ に於ける r の 3 次項が 1 次項に比べて十分小さければ良く、3 次項の寄与を 10% 以下にするには

$$r \lesssim 0.12L \quad (9)$$

を満たせば良い。同様に B_z からの寄与が 10% 以下にするには

$$r \lesssim 0.032L \quad (10)$$

を満たせば良い。

3 ヘリカル四重極磁場の Transfer Matrix

前節の議論からヘリカル四重極磁場は、中心軸近傍では線形近似可能で局所的には $\frac{kz}{2}$ 回転した四重極磁場と等

価であり、進行方向への並進は回転と等価なので、ヘリカル四重極磁場の Transfer Matrix $M_{HQ}(s_1|s_0)$ は回転行列 $R(\theta)$ と四重極磁場の Transfer Matrix $M_Q(s_1|s_0)$ を用いて以下の形で与えることが出来る。

$$\begin{aligned} M_{HQ}(s_N|s_0) &= \prod_{i=0}^{N-1} M_{HQ}(s_{i+1}|s_i) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} R\left(\frac{ks_i}{2}\right) M_{HQ}(s_{i+1} - s_i|0) R\left(-\frac{ks_i}{2}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} R\left(\frac{ks_i}{2}\right) M_Q(s_{i+1} - s_i|0) R\left(-\frac{ks_i}{2}\right) \\ &= R\left(\frac{ks_N}{2}\right) \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} R\left(\frac{k\Delta s}{2}\right) M_Q(\Delta s|0) \\ &\quad \times R\left(-\frac{ks_0}{2}\right), \quad \Delta s = \frac{s_N - s_0}{N} \quad (11) \end{aligned}$$

ここで、 $\{s_i|i=0, \dots, N\}$ は、すべての i で $s_i < s_{i+1}$ を満たす区間 $[s_0, s_N]$ の分割である。

式 (11) の無限積に着目すると同じ行列 $R\left(\frac{k\Delta s}{2}\right) M_Q(\Delta s|0)$ の積の形になるので固有値と固有ベクトルは次の形で表現できる。

$$\hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{u}}_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} \left(R\left(\frac{k\Delta s}{2}\right) M_Q(\Delta s|0) \right) \hat{\mathbf{u}}_i \quad (12)$$

$$\lambda_i(\Delta s) \mathbf{u}_i(\Delta s) = R\left(\frac{k\Delta s}{2}\right) M_Q(\Delta s|0) \mathbf{u}_i(\Delta s) \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \mathbf{u}_i(\Delta s), \quad \hat{\lambda}_i = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \lambda_i(\Delta s)^{\frac{s_N - s_0}{\Delta s}} \quad (14)$$

従って、4元 (x, x', y, y') の Transfer Matrix は $\hat{\lambda}_i, \hat{\mathbf{u}}_i$, $U = (\hat{\mathbf{u}}_1 \hat{\mathbf{u}}_2 \hat{\mathbf{u}}_3 \hat{\mathbf{u}}_4)$ を用いて以下で与えられる。

$$M_{HQ}(s_N|s_0) = R\left(\frac{ks_N}{2}\right) U \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 & & & \\ & \hat{\lambda}_2 & & \\ & & \hat{\lambda}_3 & \\ & & & \hat{\lambda}_4 \end{pmatrix} U^{-1} R\left(-\frac{ks_0}{2}\right) \quad (15)$$

安定条件は、式 (14) の解

$$\hat{\lambda}_1 = (\hat{\lambda}_2)^* = e^{-i\sqrt{\frac{k^2}{4} + K}s} \quad (16)$$

$$\hat{\lambda}_3 = (\hat{\lambda}_4)^* = e^{-i\sqrt{\frac{k^2}{4} - K}s} \quad (17)$$

から

$$|K| \leq \frac{k^2}{4} \quad (18)$$

が得られる。ここで、 K は四重極磁場の K 値である。

4 ヘリカル四重極磁場でのビームサイズ

マッチドビームを仮定した場合、 $z \rightarrow z + L$ への輸送で位相空間上での分布が不変であることから固有振動

の部分空間を振動の位相を均一にうめれば良いので、ビームは次の形に書ける。

$$\mathbf{u}^{\theta_H, \theta_L, \theta_0}(s) = \frac{1}{2} R\left(\frac{ks}{2}\right) U \left(\hat{\mathbf{u}}_1 e^{-i(\omega_H s + \theta_H)} A_H \cos \theta_0 + (\hat{\mathbf{u}}_3 e^{-i(\omega_L s + \theta_L)} A_L \cos \theta_0 + c.c.) \right) \quad (19)$$

ここで、 ω_H, ω_L はそれぞれ $\sqrt{\frac{k^2}{4} + K}, \sqrt{\frac{k^2}{4} - K}$ であり、 θ はビームの構成粒子のインデックスで、 θ_H, θ_L は区間 $[0, 2\pi]$ を均一に走り、 θ_0 は区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ を走る。このとき、ビームのエミッタンスは4元の σ -Matrix 2 で表される。

FODO 収束系と比較するために x, y 軸が均等なビームを考えると、自由度 $\frac{A_L}{A_H}$ の固定条件として $\det \sigma_{xx} = \det \sigma_{yy}^3$ を選んで

$$\frac{A_L}{A_H} = \sqrt{\frac{k^2 + 4K}{k^2 - 4K}} \quad (20)$$

を得る。この条件のもとで式 (19) の作るエンベロープから得られる β, γ 関数⁴は、

$$\beta_x(s) = L \frac{1}{4\pi} \frac{\pi^2}{B} \frac{2 - \left(\frac{B}{\pi^2}\right)^2 + \frac{B}{\pi^2} \cos ks}{\left(1 - \frac{B}{\pi^2}\right) \sqrt{1 + \frac{B}{\pi^2}}} \quad (21)$$

$$\gamma_x(s) = \frac{1}{L} \frac{\pi}{4} \frac{B}{\pi^2} \frac{1 - \frac{B}{\pi^2} \cos ks}{\left(1 - \frac{B}{\pi^2}\right) \sqrt{1 + \frac{B}{\pi^2}}} \quad (22)$$

$$\beta_y(s) = \beta_x\left(s + \frac{\pi}{k}\right) \quad (23)$$

$$\gamma_y(s) = \gamma_x\left(s + \frac{\pi}{k}\right) \quad (24)$$

で与えられる。ここで、 B は $K \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2$ で定義される無次元量である。同様に、最大ビームサイズの指標 $\Gamma_+ = \frac{\beta_{max}}{L}$ は次のように表せる。

$$\Gamma_+(B) = \frac{1}{4\pi} \frac{\pi^2}{B} \frac{2 + \frac{B}{\pi^2} - \left(\frac{B}{\pi^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{B}{\pi^2}\right) \sqrt{1 + \frac{B}{\pi^2}}} \quad (25)$$

また、 Γ_+ を用いて線形近似の条件 (9) (10) はそれぞれを書き直すと次式が得られる。

$$Eq.(9) \rightarrow \frac{\varepsilon}{L} \lesssim \frac{0.014}{\Gamma_+} \quad (26)$$

$$Eq.(10) \rightarrow \frac{\varepsilon}{L} \lesssim \frac{0.0010}{\Gamma_+} \quad (27)$$

5 FODO との比較

式 (1) と同様に Maxwell 方程式を満たす FODO 収束系を与える磁気ポテンシャルは

$$\Phi(r, \theta, z) = \frac{\Phi_0}{k} I_2(kr) \sin 2\theta \sin kz \quad (28)$$

²固有ベクトル空間での σ -Matrix を U で座標変換することで得られる

³ x - y の結合が無い場合は、 $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ になる

⁴ x - y の結合があるので FODO との比較のための便宜上のものである

で与えられ、線形近似の範囲で運動方程式は

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -K \sin(ks)x \quad (29)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = K \sin(ks)y \quad (30)$$

と書き下せる。しかし、これは Mathieu 方程式そのものであり簡単な形で解を書き下すことが出来ないで、長さ $\frac{L}{4}$ づつ QF-Drift-QD-Drift を並べた FODO Lattice⁵との比較を行なう。収束と発散がバランスした FODO の場合、 x, y 両軸とも同じ β 関数で記述でき、 β 関数の極値は Q Magnet の中心にあるので、 β_{xmax} は、FQ Magnet の中心から一周分分の Transfer Matrix M_{rev} を用いて

$$\Gamma_+ = \frac{\beta_{xmax}}{L} = \frac{M_{rev12}}{L\sqrt{1 - \left(\frac{\text{tr} M_{rev}}{2}\right)^2}} \quad (31)$$

で表せる。

ヘリカル四重極と FODO それぞれの磁気ポテンシャル式 (1) と式 (28) からヘリカル四重極は FODO に Skew FODO を重ねたものであり収束力は FODO 2 セット分に相当していると予測される。ヘリカル四重極の B

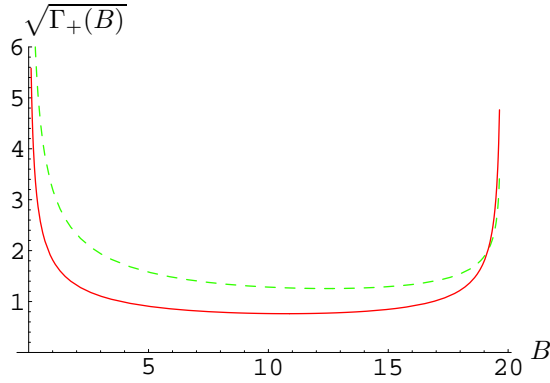


図 2: ヘリカル四重極と FODO の $\sqrt{\Gamma_+}$ の比較:
実線- $\sqrt{\Gamma_{+HelicalQ}}(\frac{B}{2})$, 破線- $\sqrt{\Gamma_{+FODO}}(B)$

値を 2 倍にスケールして $\sqrt{\Gamma_+}$ の振舞いを比較したのが、図.2 である。図.2 からヘリカル四重極は FODO と比較して、 B が小さい領域での $\sqrt{\Gamma_+}$ の改善が大きく、 $B\rho^6$ の高い粒子の収束性の改善に高い効果がありモーメントアクセプタンスが広がることが期待できる。また、磁場の周期 L 当たりの最小ビームサイズ $\sqrt{\Gamma_{+min}}$ は FODO の 60% 程度になるので、磁場の周期 L と扱う運動量 $B\rho$ が同じなら FODO に比べて同一ビームサイズで約 2.7 倍のエミッタンスを輸送できる。磁石を作る際には磁極先端の磁束密度 B_{pole} で制限を受けるので、線形近似が成り立つ範囲でのエミッタ

ンス ε と B_{pole} の関係

$$\begin{aligned} B_{pole} &> \frac{r_{bore}}{r_{beam}} \frac{dB_y}{dx} x_{max} = \frac{r_{bore}}{r_{beam}} KB\rho\sqrt{\Gamma_+L\varepsilon} \\ &= \frac{r_{bore}}{r_{beam}} \frac{B}{L^{\frac{3}{2}}} B\rho\sqrt{\Gamma_+\varepsilon} \end{aligned} \quad (32)$$

から、ボアのマージン $\frac{r_{bore}}{r_{beam}}$ が同じなら磁極先端の磁場 B_{pole} は半分で済み、コイル長が FODO の 4 倍に達していなければ励磁電力の削減が期待できる。

ここまでの解析は、線形近似に基づいている。線形近似の成立する範囲を越えるビームサイズでは、非線形項の効果が現れて来るので実際に粒子を磁場 (3)(4)(5) の中で追跡する必要がある。次に示す図.3 は、式 (26)(27) の条件に近いエミッタンス ε で粒子追跡を行なうことで評価した $\sqrt{\Gamma_+}$ を示している。図.3 では、エミッタ

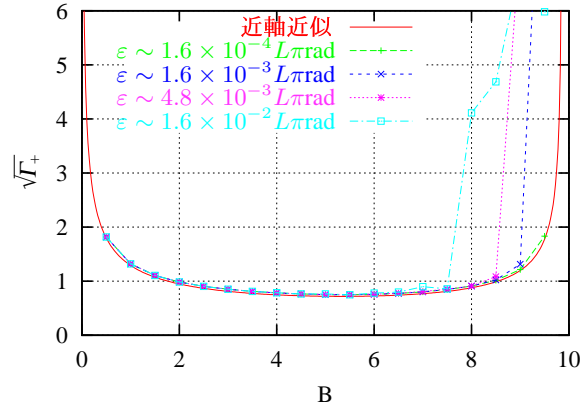


図 3: 粒子追跡で求めた $\sqrt{\Gamma_+}$

ンス ε が大きくなって来ると、磁場勾配の強い $B = \pi^2$ 側から近軸近似が悪くなりビームサイズが増大することが分かる。

以上の特性と $x-y$ 軸が結合することを考えると、高速・高エミッタンスな 2 次粒子の輸送系への応用に適用していると思われる。試算として、2 次ミュオンビームを輸送を検討してみる。ミュオンビームのエミッタンス ε を $10^4 \pi \text{mm} \cdot \text{mrad}$ 程度として、エネルギー 20MeV, 300MeV ($B\rho \sim 0.22, 2.3 \text{T} \cdot \text{m}$) の場合での試算を行なう。エネルギー 20MeV の場合、 $B = 2, \sqrt{\Gamma_+} \sim 1$ を選ぶと、 $L = 0.3 \text{m}$ でビーム半径 $x_{max} \sim 5.4 \text{cm}$ 、磁場勾配 $\frac{dB_y}{dx} \sim 4.9 \text{T} \cdot \text{m}$ となりボア半径を 10cm 程度にすると磁極表面の磁束密度 B_{pole} は 8kG 程度になる。 $\frac{\varepsilon}{L} \sim 3 \times 10^{-2} \pi \text{rad}$ なので図.3 からの推定で $B \sim 6$ 付近まで使えそうなのでボア半径ぎりぎりまで使うと運動量で -60% から $+300\%$ の範囲を輸送できる。同様にエネルギー 300MeV の場合、 $B = 2, \sqrt{\Gamma_+} \sim 1, L = 1.2 \text{m}$ でビーム半径 $x_{max} \sim 10 \text{cm}$ 、磁場勾配 $\frac{dB_y}{dx} \sim 4.6 \text{T} \cdot \text{m}$ となりボア半径を 20cm 程度にすると B_{pole} は 12kG 程度になる。 $\frac{\varepsilon}{L} \sim 1 \times 10^{-2} \pi \text{rad}$ なので $B \sim 7.5$ 付近まで使うとすると先と同じ条件で運動量で -70% から $+300\%$ の範囲を輸送できる。実際に作る場合、電磁石では磁極へのコイルの装着に難があると考えられるが、最近の希土類磁石の保磁力であれば小型のものは永久磁石で作ることが可能であると考えられる。

⁵境界では Maxwell 方程式を満たしていない

⁶ $B = KL^2 = \frac{dB}{B\rho} L^2$