

長距離ウェーク場を含む不均等蓄積したビームの 集団不安定性の IIR フィルターを用いた解析

ANALYSIS OF COLLECTIVE INSTABILITIES OF UNEVEN FILLED BEAMS INCLUDING LONG RANGE WAKE FIELDS USING AN IIR FILTER

外山毅^{#, A)}, 小林愛音^{A)}, 中村剛^{A)}, 菫蒲田義博^{B)}

Takeshi Toyama^{#, A)}, Aine Kobayashi^{A)}, Takeshi Nakamura^{A)}, Yoshihiro Shobuda^{B)}

^{A)}KEK

^{B)}JAEA

Abstract

Wake fields produced by high intensity beam act on the beam itself and make the beam motion unstable, then cause beam loss, which gives the limit on the beam power upgrade in the high intensity accelerators such as J-PARC. Many existing theoretical predictions are applicable only on even-filled bunches in an accelerator or storage ring. Uneven-filling, eg. 8 bunches out of 9 RF-buckets are filled in the MR of J-PARC, is also important to examine. In addition, long-range wake fields such as a resistive wall which decays with ~ 1 ms is not easy to evaluate. These issues can be resolved by approximating the wake fields with an IIR (Infinite Impulse Response) filter. Proposed algorithm is explained and applied on a transverse coupled-bunch instability with resistive-wall wake fields in the J-PARC MR.

1. はじめに

J-PARC の様な大強度ビーム加速器では、ビームが発生するウェーク場がビーム自身に働き不安定な運動を引き起こす。これがビーム損失の原因の一つとなり、ビーム強度の増強に制限を与える。不安定性の理論的計算のほとんどが、リングに対称に蓄積されたバンチを対象にしているため、J-PARC MR での 9 個の RF バケツに対して 8 個のバンチの蓄積、あるいはスタディでの不均等な蓄積などの場合、解析が難しくなっている[1, 2]。シミュレーションにおいても、壁抵抗によるウェーク場などの長距離で生き残るものは計算が簡単ではない。例えば、J-PARC MR では、壁抵抗のウェーク場は減衰時間 ~ 1 ms (~ 200 ターン) 程度と見積もられる。この様なウェーク場でも、ビーム変位からキック力への伝達関数を IIR (infinite impulse response) フィルターで近似すると、数ターン前までの履歴情報のみで計算可能となる。(文献[3]の拡張とも考えられる。) 壁抵抗ウェーク場は、文献[4, 5]より $\exp(-\alpha s)$ の形の重ね合わせで表現できるので、線形系を記述する IIR filter で表すことができるのである。逆に、ウェーク場が線形系で記述できれば本方法が適用できる。Rigid bunch モデルの場合の計算方法、J-PARC MR に適用した結果を報告する。

2. 計算方法

2.1 ウェークポテンシャルを含む運動の記述

ウェークポテンシャルは、線電荷密度を $\lambda(z)$ 、ウェーク関数を $W(z)$ とすると、

$$V(z) = \int_{-\infty}^z W(z-z') \lambda(z') x(z') dz'$$

と表すことができる。リング 1 ターン毎に離散的に近似すると、 k ターン目の位置を $x(k)$ 、ウェークポテンシャルを $V(k)$ とすると

$$V(k) = \sum_{k'=-\infty}^k W(k-k') eN_B x(k')$$

とかける。 $W(k-k') = V_0 e^{-\alpha(k-k')L_0}$ の場合は、

$$V(k) = \sum_{k'=-\infty}^k C_0 e^{-\alpha(k-k')L_0} x(k') \quad (1)$$

$$= C_0 x(k) + \sum_{k'=-\infty}^{k-1} C_0 e^{-\alpha(k-k')L_0} x(k') \quad (2)$$

とかける。 $C_0 = eN_B V_0$, L_0 : 周長と置いた。一方 Eq. (1) より

$$V(k-1) = e^{\alpha L_0} \sum_{k'=-\infty}^{k-1} C_0 e^{-\alpha(k-k')L_0} x(k') \quad (3)$$

となる。Eq. (2) と Eq. (3) より

$$V(k) = e^{-\alpha} V(k-1) + C_0 x(k) \quad (4)$$

のような IIR フィルターの式を得る。時間の座標を Fig. (1) のように考える。マルチバンチの場合、

$$\begin{aligned} V\left(k + \frac{n}{M}\right) &= C_0 \sum_{m=0}^n e^{-\alpha\left(\frac{n-m}{M}\right)L_0} x\left(k + \frac{m}{M}\right) \\ &+ C_0 \sum_{m=n+1}^{M-1} e^{-\alpha\left(1+\frac{n-m}{M}\right)L_0} x\left(k-1 + \frac{m}{M}\right) \\ &+ C_0 \sum_{m=0}^n e^{-\alpha\left(1+\frac{n-m}{M}\right)L_0} x\left(k-1 + \frac{m}{M}\right) \end{aligned}$$

[#]takeshi.toyama@kek.jp

$$+C_0 \sum_{k'=-\infty}^{k-2} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-\alpha(k-k'+\frac{n-m}{M})L_0} x\left(k'+\frac{m}{M}\right) \quad (5)$$

とかける。右辺の第1項と第2項は最新の1ターン分、第3項と第4項はそれ以前からの寄与である。途中でターンの区切りを跨ぐ。k-1ターン目の $V(k-1+\frac{n}{M})$ については

$$V\left(k-1+\frac{n}{M}\right) = C_0 e^{\alpha L_0} \left\{ \sum_{m=0}^n e^{-\alpha(1+\frac{n-m}{M})L_0} x\left(k-1+\frac{m}{M}\right) + \sum_{k'=-\infty}^{k-2} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-\alpha(k-k'+\frac{n-m}{M})L_0} x\left(k'+\frac{m}{M}\right) \right\} \quad (6)$$

と書けるので、Eq. (5)に代入すると、

$$V\left(k+\frac{n}{M}\right) = e^{-\alpha L_0} V\left(k-1+\frac{n}{M}\right) + C_0 \sum_{m=0}^n e^{-\alpha(\frac{n-m}{M})L_0} x\left(k+\frac{m}{M}\right) + C_0 \sum_{m=n+1}^{M-1} e^{-\alpha(1+\frac{n-m}{M})L_0} x\left(k-1+\frac{m}{M}\right) \quad (7)$$

と Eq. (4) に対応するマルチバンチの式を得る。k 番目のターンの $n=0, \dots, M-1$ のバンチに働くウェークポテンシャル、およびそれらのバンチ位置、およびその微分を、それぞれベクトルで $\{\mathbf{0}, \mathbf{V}\}_k$ 、 $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}'\}_k$ と書くと、個々のバンチに関する Eq. (7) は
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_k = e^{-\alpha L_0} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_{k-1} + B_0 W_0 \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}_k + B_1 W_0 \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}_{k-1} \quad (8)$$
 となる。 B_0, B_1 は、Eq. (7) で定義される行列である。 W_0 はバンチの有無を 1, 0 で書き込んだ行列である。

ビームの運動は、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}_{k+1} = M_C \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}_k + \frac{e}{mc^2 \beta^2 \gamma} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_k \right\} \quad (9)$$

と Eq. (8) から、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}_{k+1} = \{M_C + e^{-\alpha L_0} + M_C B_0 W_0\} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}_k + M_C \{-e^{-\alpha L_0} + B_1 W_0\} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}_{k-1} \quad (10)$$

となる。複数の減衰項 ($\ell=1, \dots, L$) を計算する場合は、Eq. (8) によって各減衰項によるウェークポテンシャルを評価し、Eq. (9) の代わりに

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}_{k+1} = M_C \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}_k + \frac{e}{mc^2 \beta^2 \gamma} \sum_{\ell=1}^L \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_\ell \end{bmatrix}_k \right\} \quad (11)$$

を使って時間発展を計算する。Eq. (10) は、2階行列差分方程式で、固有値を使って安定性を判定できる。Eq. (11) を使う場合は階数が増えると考えられるが、固有値による安定性の議論は可能と思われる。

2.2 抵抗性壁によるウェークとインピーダンス

薄肉の金属真空ダクトによる抵抗性壁ウェーク関数は、文献[4]によると、次のように表すことができる：

$$W_{\perp}(s) = 2 \frac{cZ_0 \rho_0}{\pi b^3} \frac{1}{d} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2)(n+1/2)^2} \right] D_{\perp}. \quad (12)$$

ここで、変数の定義は文献[4]による。真空ダクトの外側が磁性体で覆われている場合は、文献[5]および

J-PARC MR の真空ダクトの形状を考慮することにより、Eq. (12) に

$$W_{\perp, \text{Metal}}(s) \approx 2 \frac{cZ_0 \rho_0}{\pi b^3} \frac{1}{d} e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2) / 320} D_{\perp}. \quad (13)$$

を加えることにより表せることがわかる。これらの減衰の様子を Fig. 2 にプロットした。J-PARC MR では、バンチ間隔が 174 m なので、長距離ウェークの最長のものから 3 つまでを考慮すれば良いことがわかる。以下の計算では、これらの 3 つの項のみを考える。Figure 3 に、対応するインピーダンスをプロットした。

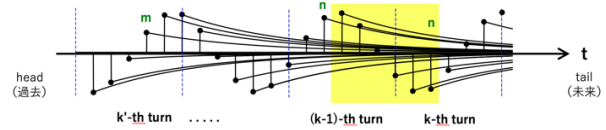


Figure 1: Time ($t = z/v$) evolution of bunch oscillations and wake potentials. Number of bunches is 6 per turn in this case. Yellow-colored area corresponds to the renewed parameters in the recurrence relation Eq. (8). This is a big saving of number of parameters.

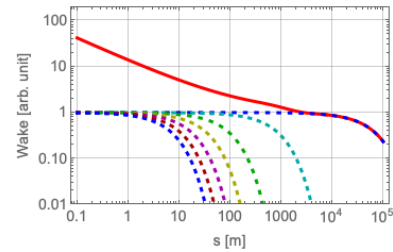


Figure 2: Resistive wall wake function. Vacuum duct parameters of the J-PARC MR is used. Red full curve is the sum of Eq. (12) and Eq. (13). Blue dashed curve, which is stretching to the right-hand side, is the contribution from Eq. (13). The other dashed curves are contributions from Eq. (12). In the J-PARC MR the bunch spacing is 174 m. Taking three terms from the longest range is enough for wake effect calculation.

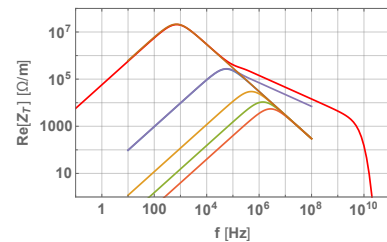


Figure 3: Resistive wall impedance. Red full curve is the sum of corresponding impedance of Eq. (12) and Eq. (13). Purple full curve is the corresponding impedance of the wake term, $e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2) / 4}$. The other curves correspond shorter range wake terms.

3. J-PARC MR への適用

3.1 ベンチマーク (バンチの均等配置)

理論計算が簡単に適用できる「バンチの均等配置」を比較の対象として、 $h=9, M=9$ 、および $h=6, M=6$ の場合について計算した。使用したビームパラメータを Table 1 にまとめる。

使った理論式は[6]、

$$\frac{1}{\tau_{m,\mu}} = \frac{eMI_B\omega_0}{4\pi\beta E_0} \frac{\sum Re[\beta_{\perp}Z_1^{\perp}(\omega_q)]h_m(\omega_q - \omega_{\xi})}{B \sum h_m(\omega_q - \omega_{\xi})} F_m \quad (10)$$

および同様の[7]からとった理論式である。計算の結果を Table 2 にまとめる。ここでの本研究の計算値は、固有値解析によって得たものである。一致は良好と考えられる。理論値間の小さな相違は $v_{\perp} \sim R/\beta_{\perp}$ の近似値の相違からくると考えられる。

Table 1: MR Parameters for the Bench Mark

Parameters			unit
# of protons /bunch	N_B	3.5 $\times 10^{13}$	p/b
# of bunches	M	9 or 6	
Revolution frequency	f_{rev}	185748	Hz
Kinetic energy	$E_0 - mc^2$	3	GeV
Circumference	C	1567.5	m
Betatron tune	ν_y	21.35	
Beta function	β_y	17	m
Beam duct radius	b	65	mm
thickness	T	2	mm
conductivity	σ	1.4×10^6	S/m

Table 2: Result of the Bench Mark

	M = 6	M = 9
Growth rate (Hz)		
Shobuda	738	1137
Ng	1106	1704
This work	1075	1653

3.2 不均等配置：9 RF バケツ、6 バンチの場合

ここでは、文献[8]で調査が行われている $h=9$ 、バンチ数 6 に関して計算を行った。参考のために $h=6, M=6$ も計算した。バンチ配置を、バンチの有無を 1, 0 で表すと、

1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0

1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0

の 2 種類の配置について調べた。使用したビームパラメータを Table 3 に、growth rate の計算結果を Table 4 にまとめる。

Table 3: MR Parameters for Un-Even Filling Simulation

Parameters			
# of protons /bunch	N_B	0.6×10^{13}	p / b
# of bunches	M	9 or 6	
Betatron tune	ν_y	20.79	

Table 4: Result of Un-Even Filling Simulation

	111111	110110110	111111000
Growth rate (Hz)			
Shobuda	678	-	-
Ng	988	-	-
This work	962	964	973

本研究での計算では、初期値にある位置変位または乱数を与えたりして growth rate を確認した。growth rate がばらつく領域を過ぎて十分大きな振幅振幅 (非物理的大きさかもしれないが) になった後には値は安定した。

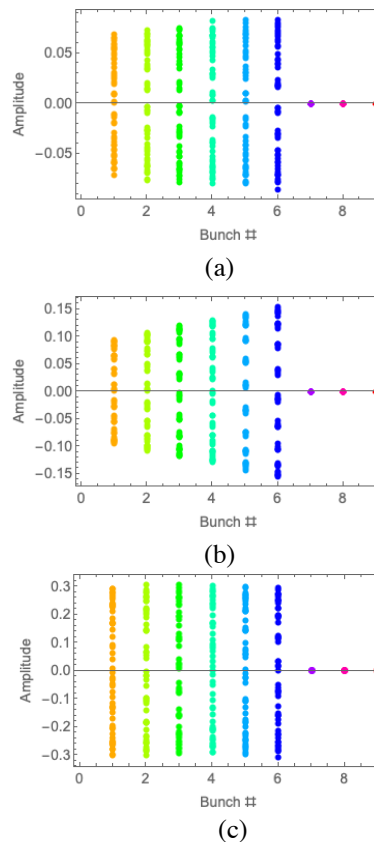


Figure 4: Betatron oscillation amplitude along a bunch train. Filling pattern is 11111100. Superposition of 50 turns are depicted. Included wakes are (a) $e^{-(\pi^2\rho_0s/d^2)9/4} + e^{-(\pi^2\rho_0s/d^2)/4} + e^{-(\pi^2\rho_0s/d^2)/320}$, (b) $e^{-(\pi^2\rho_0s/d^2)/4}$, (c) $e^{-(\pi^2\rho_0s/d^2)/320}$.

不均等配置 11111000 の場合、インスタビリティの増大が始まって、振動が定常的になった段階での各バンチの振幅を Figure 4 にプロットした。(a) には、ウェークポテンシャルとして

$$e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2) 9/4} + e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2) / 4} + e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2) / 320}$$

を使った場合の 50 ターン分のバンチ位置を重ね書きした結果を示した。(b),(c)にも、それぞれ

$$e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2) / 4}, \\ e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2) / 320}$$

の場合を示した。ウェークポテンシャルの減衰時定数によって、バンチ列の振幅変化が異なることがわかる。実験結果との比較により、ウェークポテンシャルのモデルの検証が可能と考えられる。

不均等配置 110110110 の場合で、上記 3 項を使った場合の計算結果を Figure 5 に示した。途中の空きバケツで wake potential が有意に減衰する結果、バンチの振幅に (a) に示すような増減が発生する。

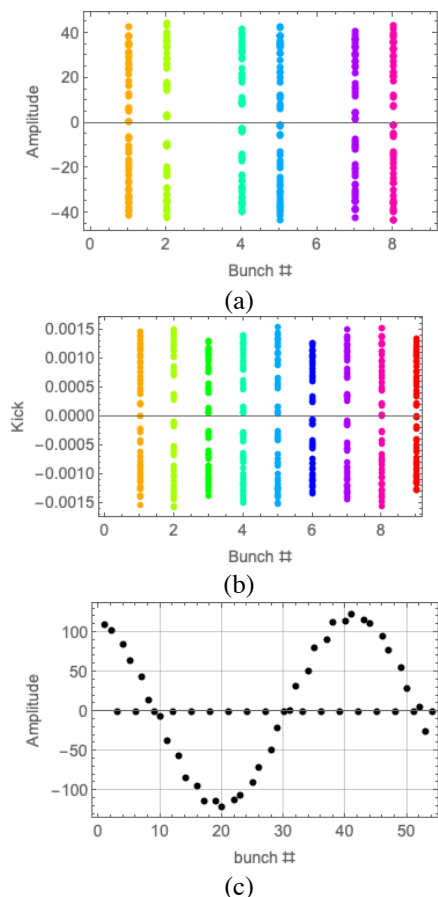


Figure 5: Betatron oscillation amplitude along a bunch train. Filling pattern is 110110110. Superposition of 50 turns are depicted in (a) and (b). Bunches of # 1, 4, 7 have smaller amplitudes in (a). This is reasonable by looking at the wake kick strengths in (b). Oscillation along the bunch train in 6 turns are depicted in (c). Included wake is $e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2) 9/4} + e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2) / 4} + e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2) / 320}$ for all cases.

4. まとめ

IIR filter を応用して、long-range wake, 任意の bunch filling pattern に適用可能な transverse coupled bunch instability の計算方法を提案した。抵抗性壁は $e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2)(n+1/2)^2}$ ($n = 0, \dots, \infty$) の項などの重ね合わせで表せる[4]。ベンチマークとしては、上記の考察からウェークポテンシャルの 1 成分 ($e^{-(\pi^2 \rho_0 s / d^2) / 4}$) を使った場合の理論計算と比較を行い、良好な growth rate 計算値の一致をみた。

6 バンチの不均等なバンチ配置など：111111, 110110110, 111110000 に関して計算を行い、各場合の growth rate は、111111 と 110110110 はほぼ同じ、111110000 では 1% 程度大きくなるのがわかった。インスタビリティの定常状態では、減衰時定数によっては、バンチ列に沿った振幅増大が見られた。

“Incoherent quadrupole wake”の寄与も含んだ計算も検証中である。実験データと正確な比較をするには multi-particle simulation への拡張が必須であり、今後行う予定である。

また、本手法はウェークポテンシャルが線形であれば (IIR を作る事が出来れば) 適用できるので、 $e^{-\alpha s}$ の α が複素数(振動項)を含むウェークポテンシャルの場合や、longitudinal instability にも適用ができると期待される。

参考文献

- [1] S. Prabhakar, “New Diagnostics and Cures for Coupled-Bunch Instabilities”, Ph.D. thesis, Stanford University 1999.
- [2] G. Stupakov, “Multi-bunch instability with uneven fills”, presented at HSC meeting, CERN Apr. 18, 2016.
- [3] A. W. Chao, “Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators”, Wiley (1993) ISBN: 9780471551843, P.214.
- [4] Y. Shobuda and K. Yokoya, PHYSICAL REVIEW E 66, 056501, 2002.
- [5] E. Métral, CERN-AB-2005-084.
- [6] K. Y. Ng, “Physics of Intensity Dependent Beam Instabilities”, World Scientific (2006) ISBN: 9812563423.
- [7] Y. Shobuda, OHO2010 (Japanese).
- [8] A. Kobayashi *et al.*, in these proceedings, FRPP06.