

HOM コップラー4 本付き空洞の対称性と共振モードの分類

SYMMETRY OF AN RF CAVITY HAVING FOUR HOM COUPLERS AND CLASSIFICATION OF ITS RESONANT MODES

坂中章悟^{#, A)}

Shogo Sakanaka ^{#, A)}

^{A)} High Energy Accelerator Research Organization (KEK)

Abstract

In an axially symmetric rf cavity, its eigenmodes (resonant modes) are expressed by the TE_{nmp} -like and TM_{nmp} -like modes. Even when the axial symmetry of the cavity is weakly broken, the eigenmodes of the cavity are approximately expressed by the TE_{nmp} -like and TM_{nmp} -like modes, as is widely applied. However, if the axial symmetry is strongly broken, the eigenmodes of the cavity cannot be no longer expressed by the TE_{nmp} -like and TM_{nmp} -like modes. In such a case, we can express the symmetry of the cavity by a group of its symmetry operations. Then, the eigenmodes can be classified according to the irreducible representations of the group. Using this method, we can classify the eigenmodes in any cavity having an arbitrary symmetry. This method is also useful for predicting which pair of original eigenmodes can be coupled, or mixed, after a perturbation is applied to an axially symmetric cavity. We apply above-mentioned method to a 1.5-GHz harmonic cavity having four HOM couplers.

1. はじめに

軸対称(回転対称)な空洞共振器の固有モード(共振モード)は、 TE_{nmp} -like, TM_{nmp} -like モードで表される。多くの加速空洞では、入力カップラーや高次モード(HOM)カップラー等のために軸対称性が破れているが、近似的に軸対称であると見なせる事が多い。このため、これらの空洞でも固有モードを TE_{nmp} -like, TM_{nmp} -like モードで近似して扱われる。

しかし、高次モード(HOM)を強く減衰させる減衰空洞(damped cavity)などでは、軸対称性の破れが無視できない場合がある。特に、2つの固有モードの共振周波数が近い場合には、軸対称性を破る摂動(例えば、HOM減衰用導波管)のため、2つの固有モードが結合し、混合モードになる事がある。例えば、ATFダンピングリング用714 MHz減衰空洞[1]の設計過程では、HOM減衰用の導波管を付けると2つの高次モードが結合し、複雑な電磁場パターンを持った高次モードが現れた事があった。この場合、導波管を付けた後の空洞の対称性により、2つの高次モードが結合するか、しないかが決まる。

軸対称性が強く破れた空洞では、固有モードを TE_{nmp} -like, TM_{nmp} -like モードで表すことはできない。このような場合、空洞の幾何学的な対称性を対称操作の群で表し、その群の既約表現を用いて固有モードを分類することができる[2]。この方法では、任意の対称性を持つ空洞の固有モードを系統的かつ厳密に分類することができる。また、軸対称空洞に対して、導波管等による摂動が加わった場合に、軸対称空洞の固有モードと摂動付き空洞の固有モードを対応させる事ができる。本稿では、検討中の HOM コップラー4 本付き高調波空洞[3,4]を例に取り、群の既約表現を用いて固有モードを分類する方法を説明する。

2. 高調波空洞の対称操作の群

検討中の高調波空洞[3,4]を Figure 1 に示す。4本のロッド型 HOM コップラー (Port 3~6) が片側の端板に取り付けられている。この空洞では加速に TM_{020} モードを用いる予定で、それ以外の寄生モードをこれらの HOM コップラーで減衰させることを目論んでいる。図中の Port 1, 2 は電磁場シミュレーションのため便宜的に付けたプローブで、実際にはビームポートとなる。

この空洞では、HOM コップラーを大きく突き出すため、これらによる軸対称性の破れが無視できない可能性がある。特に、共振周波数が近い複数の高次モードは結合する可能性が大きい。どのモード同士が結合するか予め判っていれば、電磁場解析で寄生モードの減衰を調べる際に役に立つ。

この空洞の形状をビーム軸側から見た図を Figure 2 に示す。ビーム軸を z 軸とし、x 軸と y 軸をそれぞれ水平、垂直方向に取る。

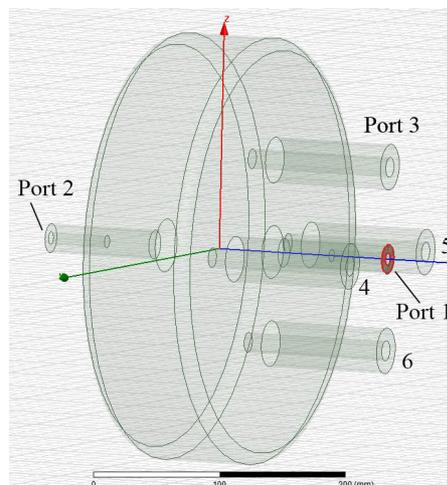


Figure 1: Harmonic cavity equipped with HOM couplers.

[#] shogo.sakanaka@kek.jp

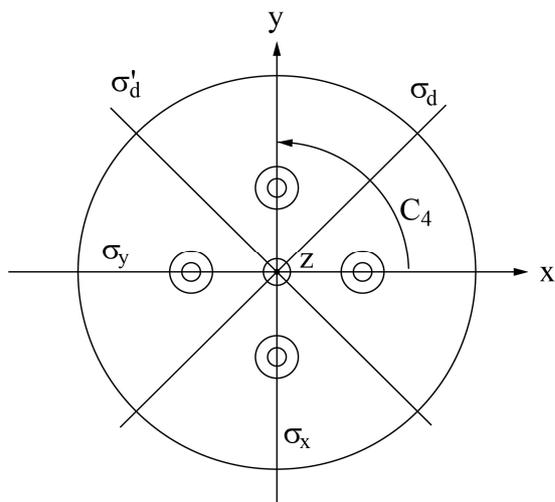


Figure 2: Shape of the HOM-coupler equipped cavity and its symmetry operations.

Figure 2 に示した形状は、次の 8 つの操作に関して対称である: $\{E, C_4, C_4^2, C_4^3, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_d, \sigma'_d\} \equiv C_{4v}$ 。ここで E は何もしない恒等操作、 C_4 は z 軸の周りの角度 $\pi/2$ の回転、 C_4^2 と C_4^3 はそれぞれ C_4 を 2 回と 3 回続けて行った回転、 σ_x は x 軸に垂直な平面 (y-z 面) に関する鏡映、 σ_y は y 軸に垂直な平面 (z-x 面) に関する鏡映、 σ_d は斜めの面に関する鏡映、 σ'_d はもう一つの斜めの面に関する鏡映、を表す。上記の 8 つの操作は、積に関して閉じており、結合法則が成り立ち、単位元と逆元が存在するため、数学的な群を作る。このように、対象物の 1 点 (この場合原点) を動かさない対称操作の群を点群と呼び、物質科学で広く用いられる [5,6]。上記の 8 つの操作の群は、シェーンフリス記号で C_{4v} という名前が付けられている。ここで C_4 は 4 回対称軸がある事を示し、添字の v は垂直鏡映面がある事を表す。

3. 群の既約表現による変換性の分類

群の各元 (要素) に対して、元の積の関係を保ちながら行列を対応させることができる (準同型写像)。これを群の表現、または行列表現と呼ぶ。ある群に対して可能な表現は無数にあるが、それらのうちで本質的に異なる、基本的な表現を既約表現 (irreducible representation) と呼ぶ [5,6]。大まかに言えば、既約表現は、ある対称操作の群のもとであり得る対称性 (変換性) のパターンを示す。

簡単な例として、Figure 3 に示す長方形を考える。この形状は、x 軸に関する鏡映 (σ_y) と y 軸に関する鏡映 (σ_x) の操作に対して対称である。また、z 軸周りの角度 π の回転 $C_2 (= \sigma_x \sigma_y)$ と恒等操作 E に対しても対称である。従って、形状の対称性を表す操作の群は、 $\{E, C_2, \sigma_y, \sigma_x\} \equiv C_{2v}$ で表される。 C_{2v} は前述したシェーンフリス記号によるこの点群の名称である。

Figure 3 に示した長方形の内部で定義された任意の関数 $f(x,y)$ を考える。任意の関数は何の対称性も持たないが、上記 4 つの対称操作に関して何らかの対称性を持つ関数を挙げると、何種類あるだろうか? 直感的にわかるように、 σ_y と σ_x の 2 つの鏡映について、それぞれ偶、奇の対称性を持つものが考えられる。それらを組み合わせ

せて、4 通りの対称性があり得る。これは実際正しく、群 $\{E, C_2, \sigma_y, \sigma_x\}$ の既約表現は 4 つあり、全てが 1 次元表現 (対応する行列が一次元、即ち数値) であることが知られている。

点群 C_{2v} の既約表現を Table 1 に示す。Table 1 の各行は、異なる既約表現を表し、左端の欄にその既約表現をマリケン記号 (物質科学などで用いられる表記) で示してある。Table 1 の各列は、群の各元 (E, C_2 , σ_y , σ_x) に対し、表現行列の跡 (指標と呼ぶ) を示す。この例のように 1 次元表現の場合には、指標は表現行列そのものである。表現行列を直接載せないで指標を用いるのは、指標が基底の取り方によらない不変量のためである。

Table 1 で操作 σ_y , σ_x に対応する欄に注目すると、それぞれに対して偶、奇の対称性の組み合わせ、合計 4 通りが掲載されている事がわかる。回転 C_2 の欄は、関係 $C_2 = \sigma_x \sigma_y$ と矛盾のないように決められている。既約表現は A_1, A_2, B_1, B_2 と名付けられた 4 つがあるが、例えば、既約表現 A_1 は、4 つ全ての対称操作について対称であるという事を表している。

上記の点群 C_{2v} では既約表現が全て一次元、即ち表現行列が全て数値であった。これは、この点群が可換群 (元の積の順を変えても結果が同じ) であることから来ている。より一般に、群が非可換の場合には、2 次元以上の既約表現が必ず現れる。物理の問題では、これは縮退があり、1 つの固有値に複数の固有モードが属することに対応する。

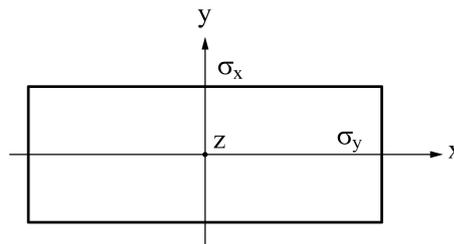


Figure 3: A rectangle and its symmetry operations.

Table 1: Irreducible Representations of the Point Group C_{2v} [5]

	E	C_2	σ_y	σ_x
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

4. 高調波空洞の固有モードの分類

Figures 1,2 に示した空洞の対称性を表す点群 C_{4v} の既約表現を Table 2 に示す。この群は非可換群であり、2 次元の既約表現 E を持つ。これは 2 重縮退したひと組の固有モードに対応する。そのうちの 1 つの固有モードに 8 つのうちの任意の対称操作を施すと、その結果は 2 つの固有モードの一次結合で表される。

Table 2 に示す 4 つの 1 次元表現 (A_1, A_2, B_1, B_2) は縮退のない固有モードに対応する。例えば、既約表現

A_1 は、全ての対称操作に関して対称であることを示す。Figures 1, 2 に示した空洞の固有モードは、これら 5 つの既約表現、 A_1, A_2, B_1, B_2, E のいずれかに分類される。これらの既約表現と、HOM カップラーを付ける前の軸対称空洞の固有モード (TE_{nmp}-like, TM_{nmp}-like) との対応関係をこの後で示す。

Table 2: Irreducible Representations of the Group C_{4v} [5]

	E	C_4, C_4^3	C_2	σ_x, σ_y	σ_d, σ_d'
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	1
E	2	0	-2	0	0

5. 軸対称空洞の固有モードの分類

まず初めに、半径 a 、長さ d の円筒空洞 (ピルボックス空洞) の固有モードを考える。これは解析的に解くことができ、TE_{nmp} モードと TM_{nmp} モードで表される[7]。ここで n, m, p は 0 または正の整数である。円筒空洞の形状は次の操作に対して対称である: $\{E, C(\alpha), \sigma_v, I, IC(\alpha), I\sigma_v\} \equiv D_{\infty h}$ 。ここで E は恒等操作、 $C(\alpha)$ は空洞の軸 (z 軸とする) に関する任意の角度 α だけの回転、 σ_v は z 軸を含む任意の平面に関する鏡映、 I は原点 (円筒空洞の中心) に関する反転、 $IC(\alpha), I\sigma_v$ はそれぞれ反転と $C(\alpha), \sigma_v$ の積である。回転と鏡映は無数にあるため、群の元は無数にある。この点群はシェーンフリス記号で $D_{\infty h}$ と名前が付いている。 D は Dihedral group の略で、添字の ∞ は任意角度の回転対称性を持つこと、添字の h は z 軸に垂直な面 (z 軸を垂直に取った場合、horizontal 面) の鏡映に関して対称であることを示す。点群 $D_{\infty h}$ は等核 2 原子分子の対称性も示し、分子科学で用いられる。

点群 $D_{\infty h}$ の既約表現、即ちこの形状を保つ対称操作に関する基本的な変換パターンの組、を Table 3 に示す。この表でも、左端の列に既約表現を、各対称操作の下に既約表現の表現行列の跡 (指標) を示してある。恒等操作 E の列にある数字が、表現の次元を示す。この点群の既約表現は、1 次元表現が 4 つ ($A_{1g}, A_{1u}, A_{2g}, A_{2u}$)、2 次元表現が E_{ng}, E_{nu} で、 n は任意の自然数であるからこれらは無数にある。添字の g, u はそれぞれ偶、奇を示すドイツ語の頭文字で、反転 I に関する対称性を示す。

解析的に解かれた TE_{nmp} モードと TM_{nmp} モードの電場 (または磁場) を示す関数が $D_{\infty h}$ の対称操作に対してどのように変換されるかを調べ、それぞれのモードがどの既約表現に対応するかをまとめた結果を Table 4 に示す。縮退のない TE_{0mp} と TM_{0mp} モードの対称性は、1 次元表現 ($A_{1g} \sim A_{2u}$) で表される。2 重縮退のある TE_{nmp}, TM_{nmp} モード ($n \geq 1$) は、2 次元表現 E_{ng} または E_{nu} に分類される。

円筒空洞の場合には固有モードが解析的に解かれているため、その解をわざわざ既約表現で分類するメリットはあまり無い。しかし一般の軸対称空洞を考えると、事情が変わってくる。一般的な軸対称空洞で、平面 $z=0$ に関

して鏡映対称なものを考える。例えば、Figure 1 で HOM カップラーが無い場合がこれに当たる。この空洞形状を対称に保つ操作は、円筒空洞のものと同じで、その点群は $D_{\infty h}$ である。その既約表現は Table 3 の通りである。軸対称空洞の固有モードはいわゆる TE_{nmp}-like、TM_{nmp}-like モードで表される。これらのモードを点群 $D_{\infty h}$ の既約表現で分類することを考えると、その結果は Table 4 の右側の列で、TM_{nmp} 等を TM_{nmp}-like 等と読み替えれば良いことがわかる。

一般の軸対称空洞では、固有モードを解析的に解くことが難しいため、数値計算で解いた解を円筒空洞の固有モードと対応付け、TM_{nmp}-like モード等と呼んでいるのである。このような対応付けは、 n, m, p の数値が小さな場合にのみ可能である。より高次の固有モードになると対応付けが上手くできず、モードを EM-1 のように番号で呼ぶことが多い。この場合、固有モードが持っている対称性の情報が名称から抜け落ちてしまう。このような場合、Table 4 の左の列に示した既約表現を同時に示せば、そのモードがどのような対称性を持つかを、適切に示すことができる。物理や化学の分野では、群の既約表現が同様の目的で用いられる。

Table 3: Irreducible Representations of the Point Group $D_{\infty h}$ [5,6]

	E	$C(\alpha)$	σ_v	I	$IC(\alpha)$	$I\sigma_v$
A_{1g}	1	1	1	1	1	1
A_{1u}	1	1	-1	-1	-1	1
A_{2g}	1	1	-1	1	1	-1
A_{2u}	1	1	1	-1	-1	-1
E_{1g}	2	$2\cos \alpha$	0	2	$2\cos \alpha$	0
E_{1u}	2	$2\cos \alpha$	0	-2	$-2\cos \alpha$	0
...
E_{ng}	2	$2\cos(n\alpha)$	0	2	$2\cos(n\alpha)$	0
E_{nu}	2	$2\cos(n\alpha)$	0	-2	$-2\cos(n\alpha)$	0
...

Table 4: Classification of Eigenmodes in a Pillbox Cavity [2] according to the Irreducible Representations of $D_{\infty h}$

Irreducible Repr. of $D_{\infty h}$	Eigenmode
A_{1g}	TM _{0mp} (p : odd)
A_{1u}	TE _{0mp} (p : even)
A_{2g}	TE _{0mp} (p : odd)
A_{2u}	TM _{0mp} (p : even)
$E_{ng} (n \geq 1)$	TE _{nmp} , TM _{nmp} ($n+p$: odd)
$E_{nu} (n \geq 1)$	TE _{nmp} , TM _{nmp} ($n+p$: even)

Table 4 の下の 2 行によれば、軸対称空洞では、 n が 1

以上の場合に TE_{nmp}-like モードと TM_{nmp}-like モードが同じ既約表現に属することがわかる。空洞共振器の理論では、 n が 1 以上の場合には TE モードと TM モードは一般に混じっている事が知られている。この事は Table 4 に矛盾なく組み込まれている。

6. HOM カップラーあり・なし空洞の固有モードの対応関係

第 4 章で、HOM カップラー付き空洞の形状の対称性が点群 C_{4v} で表され、この空洞の固有モードは Table 2 に示す既約表現のどれかに属することを説明した。この空洞から 4 本の HOM カップラーを取り除くと、第 5 章で扱った軸対称空洞になり、その固有モードは Table 3 に示す既約表現のどれかに属する。従って、Table 3 と Table 2 の既約表現の間の対応関係がわかれば、固有モード同士の対応を付けることができる。

HOM カップラーを付けた空洞は軸対称空洞より対称性が低いため、点群 C_{4v} の元(要素)は、点群 $D_{\infty h}$ に全て含まれる。即ち、 C_{4v} は $D_{\infty h}$ の部分群である。この場合、点群 $D_{\infty h}$ の既約表現は点群 C_{4v} の表現としては一般に可約になり、点群 C_{4v} の既約表現に分解できる。

やや専門的になるが、対称性の高い方の群 $D_{\infty h}$ のある表現 D が、その部分群 C_{4v} の既約表現 $D^{(\alpha)}$ の直和として、

$$D = \sum_{\alpha} q_{\alpha} D^{(\alpha)} \quad (1)$$

で表される場合、その係数 q_{α} は、

$$q_{\alpha} = \frac{1}{g} \sum_{R \in C_{4v}} \chi^{(\alpha)}(R)^* \chi(R) \quad (2)$$

で求められる[5]。ここで g は群 C_{4v} の位数(元の数、この場合 8)、 R は群 C_{4v} の任意の元、 $\chi(R)$ は元 R に対する群 $D_{\infty h}$ の表現 D の指標、 $\chi^{(\alpha)}(R)$ は元 R に対する群 C_{4v} の既約表現 α の指標、 $*$ は複素共役を表す。具体的には、点群 $D_{\infty h}$ の既約表現の指標の表 (Table 3) から、点群 C_{4v} の元に対応する指標を抜き出し、式(2)の $\chi(R)$ を求める。これに対し、群 C_{4v} の各既約表現の指標 $\chi^{(\alpha)}(R)$ の複素共役をかけ、全ての元 R について和を取って係数 q_{α} を求める。このようにして求めた、点群 $D_{\infty h}$ と点群 C_{4v} の既約表現の適合関係を Table 5 に示す。

Table 5 と Table 4 を用い、軸対称空洞の固有モード (TE_{nmp}-like, TM_{nmp}-like) と、4 本の HOM カップラーを付けた空洞の固有モードとの対応をまとめたのが Table 6 である。例えばこの表の 1 行目からは、軸対称空洞の TM_{0mp}-like モードは HOM カップラー 4 本を付けた場合に既約表現 A_1 に分類される固有モードになることがわかる。また表の 4 行目からは、軸対称空洞で 2 重縮退のある TM_{2mp}-like モードは HOM カップラーを付けると縮退が解け、既約表現 B_1 に属するモードと B_2 に属するモードに分かれる、ということがわかる。

Table 6 より、縮退に関しては次の事がわかる。(i) TM_{0mp}-like と TE_{0mp}-like モードは HOM カップラーあり・なしにかかわらず縮退がない。(ii) TM_{nmp}-like と TE_{nmp}-like のうち、 n が奇数 (1, 3, ...) のモードは 2 重縮退したままで、HOM カップラー付きの空洞では既約表現 E に属する。(iii) TM_{nmp}-like と TE_{nmp}-like のうち、 n が偶数 (2,

4, ...) のモードは、HOM カップラーを付けると縮退が解け、2つのモードに分裂する。

HOM カップラーを付ける事による固有モード同士の結合(混合)についても、Table 6 から知ることができる。HOM カップラーを 4 本付けた空洞では、同じ既約表現に属する固有モード同士が結合し得る。即ち、Table 6 の右側の列にある既約表現が同じモード同士が結合し得る。これより、次の事がわかる。(1) もとの軸対称空洞の TM_{0mp}-like モードと TE_{0mp}-like モードが結合することはない。(2) 軸対称空洞の TM_{0mp}-like モードと n が 4 の倍数の場合の TM_{nmp}-like, TE_{nmp}-like モードは結合し得る。(3) 軸対称空洞の TE_{0mp}-like モードと n が 4 の倍数の場合の TM_{nmp}-like, TE_{nmp}-like モードも結合し得る。(4) 軸対称空洞の TM_{nmp}-like, TE_{nmp}-like モードで n が奇数のもの同士は互いに結合し得る。

最後に述べたモードの結合が実際に起こるかどうかは、もとの固有モード同士の共振周波数の近さと、加えられた摂動の大きさで決まると思われる。共振周波数が近く、摂動が大きいほど、モードの結合が起こりやすい。

Table 5: Compatibility Relations between the Irreducible Representations of the Point Group $D_{\infty h}$ and those of C_{4v}

Irreducible Repre. of $D_{\infty h}$	Irreducible Repre. of C_{4v}
A_{1g}	A_1
A_{1u}	A_2
A_{2g}	A_2
A_{2u}	A_1
$E_{ng}, E_{nu} (n=4m+1, m \geq 0)$	E
$E_{ng}, E_{nu} (n=4m+2, m \geq 0)$	B_1+B_2
$E_{ng}, E_{nu} (n=4m+3, m \geq 0)$	E
$E_{ng}, E_{nu} (n=4m, m \geq 1)$	A_1+A_2

Table 6: Correspondence between the Eigenmodes of the Cavities without and with the Four HOM Couplers

Without HOM couplers ($D_{\infty h}$)	With HOM couplers (C_{4v})
TM _{0mp} -like	A_1
TE _{0mp} -like	A_2
TE _{nmp} -like, TM _{nmp} -like ($n=4m+1, m \geq 0$)	E
TE _{nmp} -like, TM _{nmp} -like ($n=4m+2, m \geq 0$)	B_1+B_2
TE _{nmp} -like, TM _{nmp} -like ($n=4m+3, m \geq 0$)	E
TE _{nmp} -like, TM _{nmp} -like ($n=4m, m \geq 1$)	A_1+A_2

7. まとめ

物理の様々な問題では、系の持つ対称性を対称操作の群で表し、系の状態の対称性をその群の既約表現で表す、という方法が良く用いられる。この方法は、空洞の固有値問題にも適用できる。空洞の形状の対称性を、記法が確立している点群で表せば、教科書等に掲載され

ている点群の既約表現をそのまま用いることができる。この方法を、HOM コップラーを 4 本付けた高調波空洞 (Figure 1) を例にとり説明した。

加速空洞として最も一般的な、軸対称かつ中央の面で鏡映対称な形状の対称性は、点群 $D_{\infty h}$ で表すことができる。軸対称空洞の固有モードは、点群 $D_{\infty h}$ の既約表現に矛盾なく対応させることができる。また、軸対称空洞に対して、HOM コップラー4 本を付けた場合には、空洞の対称性を示す群 (この例では点群 C_{4v}) は、点群 $D_{\infty h}$ の部分群になる。点群 $D_{\infty h}$ のそれぞれの既約表現を、点群 C_{4v} の既約表現に分解することにより、軸対称空洞の各固有モードと HOM コップラー付き空洞の各固有モードを対応付けることができる。この方法で、HOM コップラー等を付けた場合の縮退の分裂やモード同士の結合 (混合) について、電磁場解析をせずに予言することができる。

多少の予備知識は必要とされるが、この方法は様々な空洞の固有モードの性質を調べ、整理する際に有用であると思われる。

参考文献

- [1] S. Sakanaka, F. Hinode, K. Kubo, and J. Urakawa, "Construction of 714 MHz HOM-free accelerating cavities", *J. Synchrotron Rad.*, vol. 5, pp. 386-388, 1998.
- [2] S. Sakanaka, "Classification of eigenmodes in rf cavities using the group theory", *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, vol. 8, pp. 072002, 2005.
- [3] T. Takahashi, S. Sakanaka, N. Yamamoto, "Design Study of Damped Accelerating Cavity based on the TM020-mode and HOM Couplers for the KEK Light Source Project", in *Proceedings of IPAC'17, Copenhagen, May, 2017*, pp. 4172-4175.
- [4] T. Takahashi, S. Sakanaka, N. Yamamoto, "アンテナ型 HOM カプラを有する 1.5 GHz TM020 モード型高調波空洞の検討", in *Proceedings of the 14th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan, Sapporo, Aug. 1-3, 2017*, paper WEP052, this conference [in Japanese].
- [5] 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝, "応用群論 (増補版)", (裳華房, 1976).
- [6] Morton Hamermesh, "Group Theory and Its Application to Physical Problems" (Dover, New York, 1989).
- [7] Peter A. Rizzi, "Microwave Engineering: Passive Circuits" (Prentice-Hall, 1988), Sec. 9-3.