Beam Dynamics in Cyclotrons

1998 年

理化学研究所

後 藤　彰

Beam Dynamics in Cyclotrons

サイクロトロン中のビームダイナミックス

理研 RI ビームファクトリー計画推進室
後藤　彰
goto@riken.jp

目次

はじめに

この講義ノートは、前半が基礎編、後半が応用編（実践編）というふうに大きく二つの部分に分かれている。基礎編で、いろんなタイプのサイクロトロンの中でのビームの収束の問題等や、さらには空間電荷効果、共鳴といった基本的かつ一般的な話をし、応用編で、筆者たちが理研のサイクロトロンを設計するに当たり実際に行ったビーム解析についていろんな例を上げながら説明する。

できるだけ多くのテーマを取り上げることに主眼を置いたので、それぞれについて深く掘り下げて議論することはしない。そういうわけで、初めて出てくる概念を十分な説明なしに使用したり、途中の証明を省いて結論だけ示したりしたところもある。そういったところは、巻末に掲げた参考文献を読んで補っていただきたい。本書は、これからサイクロトロンについて勉強を始めようという人に、ビーム物理の観点からみたサイクロトロンの全体像といったようなものをつかんでもらうことを目的として書いた。

この講義ノートが、それをきっかけに少しでもサイクロトロンに興味をもちそしてより専門的なことがらへと興味を拡げていくための手引きとなれば、幸いである。

I. 基礎編

1. サイクロトロンの原理

サイクロトロンとはどういうものであるか？　サイクロトロンは、1929 年に E. O. Lawrence によって発明された。サイクロトロンの基本的なアイデアは、同じ加速電極を繰り返し使って、時間的に規則正しいインパルスを与え、粒子（イオン）を最終的に電極電圧の何十倍、何百倍ものエネルギーにまで加速する、ということである。このことは、

$$qvB = \frac{mv^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{\rho} = \frac{qB}{m} \tag{I.1}$$

で表されるように、「一定の静磁場の中では荷電粒子の回転周波数は粒子の早さによらず一定である」、ということから可能になる。したがって、もし図 I-1 のように配置されたディーとよばれる加速電極の電圧の周波数を粒子の回転周波数と等しくなるように、つまり、

$$\omega_D = \omega \tag{I.2}$$

となるように設定してやれば、粒子は加速ギャップを通る度に加速されることになる。そしてさらに、粒子は**らせん軌道**を描きながら運動することになるし、また磁場は静磁場なので、**連続なビーム**が得られる、といった特徴がある。

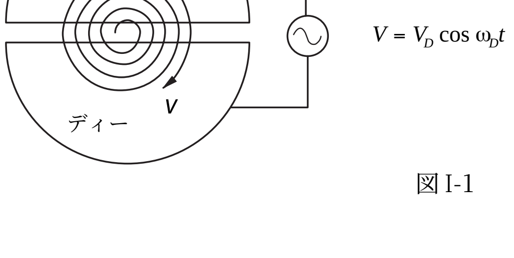


図 I-1

２．弱収束を用いたサイクロトロン

普通型（古典的）サイクロトロン

このようにサイクロトロンでは繰り返し加速ができるわけであるが、この加速の過程が実際に何回も行われるときには、粒子の運動に関してある安定性の条件が備っていなければならない。そこで、方位角方向の磁場分布が一定である、普通型サイクロトロンとか古典的サイクロトロンとよばれるサイクロトロンのビームの安定性について考えてみよう（参考文献１）。

磁極ギャップが一定のサイクロトロンの磁場の中では、メディアンプレーンとよばれる磁石の上下対称面からはずれた粒子には、図 I-2 のようにメディアンプレーンの方向にもどすような力が働く。

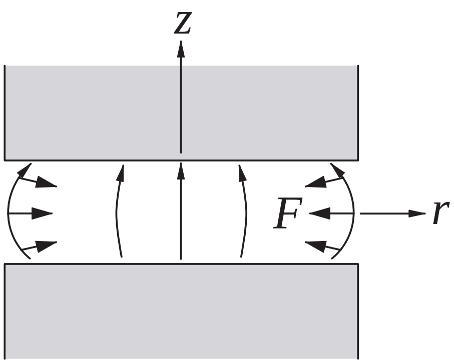


図 I-2

それは磁場が外側にふくらんでいるためで、その力の垂直方向の大きさは、

$$\begin{aligned} F_z &= q\upsilon_\theta B_r \\ &= q\upsilon_\theta \frac{\partial B_r}{\partial z} z = q\upsilon_\theta \frac{\partial B_z}{\partial r} z \qquad \left(\Leftarrow \nabla\times\vec{B}=0\right) \\ &= q\omega r \frac{\partial B_z}{\partial r} z = m\omega^2 \frac{r}{B_z}\frac{\partial B_z}{\partial r} z \\ &= m\omega^2 \mu' z \end{aligned} \tag{I.3}$$

となり、 z に比例した量で与えられる。（以下、サイクロトロンで普通に使われている円筒座標系を使う。）ここで、μ' は、

$$\mu' \equiv \frac{r}{B_z}\frac{\partial B_z}{\partial r} = -n \tag{I.4}$$

で、いわゆる n 値にマイナスの符号を付けたものである。そうすると、垂直方向の運動方程式は、

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \mu'\omega^2 z = \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_z^2 z = 0 \tag{I.5}$$

のような単振動の式になる。また、方位角方向の角度 θ を独立変数にとると、

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} - \mu' z = \frac{d^2 z}{d\theta^2} + \nu_z^2 z = 0 \tag{I.6}$$

となる。ここで、新たに導入した量 ν_Z は、

$$\nu_z = \frac{\omega_z}{\omega} = \sqrt{-\mu'} \tag{I.7}$$

のように粒子の z 方向の振動数と回転周波数との比あるいは - μ' の平方根で与えられるもので、この ν_Z のことを垂直方向の**ベータトロン振動数**（または**チューン**）とよぶ。このようにして、垂直方向の運動に関する収束条件は、

$$\mu' < 0 \qquad \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} < 0\right) \tag{I.8}$$

で与えられる。 つまり、磁場の勾配が負である必要がある、ということがわかる。

一方、水平方向の運動方程式は、

$$-q\upsilon_\theta B_z = m\left(-\frac{\upsilon^2}{r} + \frac{d^2 r}{dt^2}\right) \tag{I.9}$$

で与えられる。今、平衡軌道 R からのずれを x（r = R + x）とすると、

$$B_z(r) = B_z(R) + \frac{\partial B_z}{\partial r} x + \cdots \tag{I.10}$$

の関係を使って (I.9) 式は（x << R と仮定すると）、

$$-q\upsilon_\theta \frac{\partial B_z}{\partial r} x = \frac{m\upsilon^2 x}{R^2} + m\frac{d^2 x}{dt^2} \tag{I.11}$$

となる。（ここで、平衡軌道というのは与えられた磁場に対応した閉軌道のことで、たとえば一様磁場の場合は円軌道となるものである。）結局、水平方向の運動方程式は、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2(1+\mu')x = \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_r^2 x = 0 \tag{I.12}$$

または、

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + (1+\mu')x = \frac{d^2 x}{d\theta^2} + \nu_r^2 x = 0 \tag{I.13}$$

のようにやはり単振動の式になる。ただし、水平方向のベータトロン振動数 ν_r は、

$$\nu_r = \frac{\omega_r}{\omega} = \sqrt{1+\mu'} \qquad (I.14)$$

で与えられる。したがって、水平方向の運動に関する収束条件は、こんどは、

$$\mu' > -1 \qquad \left(\frac{r}{B_z}\frac{\partial B_z}{\partial r} > -1\right) \qquad (I.15)$$

で与えられる。

以上のことから、両方向とも収束する条件は、

$$-1 < \mu' < 0 \qquad (I.16)$$

または、

$$0 < \nu_r, \nu_z < 1 \qquad (I.17)$$

ということになる。

(I.16) 式または (I.17) 式で与えられる条件を満たす収束のことを、**弱収束**とよぶ。普通型サイクロトロンは、弱収束を用いたサイクロトロンということになる。

このように、普通型サイクロトロンでは、垂直方向の収束の条件から半径とともに減少する磁場が必要であるが、これはサイクロトロン共鳴原理

$$qB_z / m_0 = \omega = \omega_D = \text{一定} \qquad (I.18)$$

から要求される一様磁場とは矛盾することになる。さらに、等時性を保つためには、実は磁場の分布は一様磁場ではなくて、相対論効果から、

$$B_z = \frac{m}{q}\omega = \frac{m_0 \omega \gamma}{q} \qquad (I.19)$$

$$\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \beta = \frac{v}{c}\right)$$

のように半径とともに γ に比例して増加するものでなければならない。したがって、

$$B_z = \gamma B_c \quad \rightarrow \quad \mu' = \frac{r}{B_z}\frac{\partial B_z}{\partial r} > 0 \qquad (I.20)$$

から、ますます垂直方向に発散することになる。そのため、普通型サイクロトロンでは、等時性を犠牲にして安定性を確保しているのである。

一般に、サイクロトロンを周回する粒子の加速位相のずれは、

$$\Delta\phi = -360^0 h \int_0^N \frac{\Delta B}{B}\, dn \qquad (I.21)$$

で与えられるように、磁場のずれ ΔB/B に比例する。ここで、h は加速ハーモニクスとよばれる量で、RF 周波数と粒子の回転周波数の比

$$h = \frac{f_{rf}}{f_{orb}} \qquad (I.22)$$

で与えられる。また、N は粒子の全ターン数である。したがって、普通型サイクロトロンでは、磁場分布を図 I-3 のようにして、加速位相を途中で折り返しながら粒子を加速しているわけである（参考文献 2）。位相のずれは、また、全ターン数 N に（ほぼ）比例する。この N は加速電圧 V_d が大きいほど小さくなるが、V_d には限界があるため、結局加速可能なエネルギーにも限界があって、その値は陽子で 10 MeV あたりである。

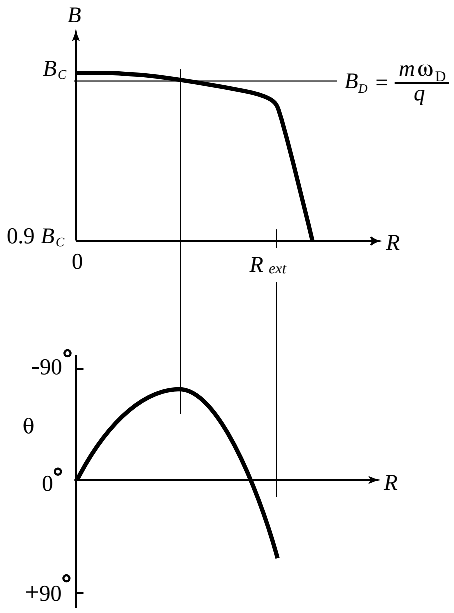


図 I-3

ここで、ベータトロン振動についてあらためて簡単に説明しておこう。ベータトロン振動の振動数は、平衡軌道のまわりの粒子の振動の振動数と粒子の回転周波数との比で与えられることは、前に述べた。このことは、粒子が 1 回転する間に何回振動するか、ということを表している。図 I-4 にいくつかのベータトロン振動の例を示した。たとえば、$\nu_r = 1$ のときには振動が 1 回、$\nu_r = 2$ のときには振動が 2 回起っていることがわかる。また、$\nu_r = 0.5$ のときには 2 回転して初めの状態に戻る、つまり 2 回転する間に 1 回振動している。$\nu_r = 0$ のときは、角度 α のらせん軌道を描いて発散している。

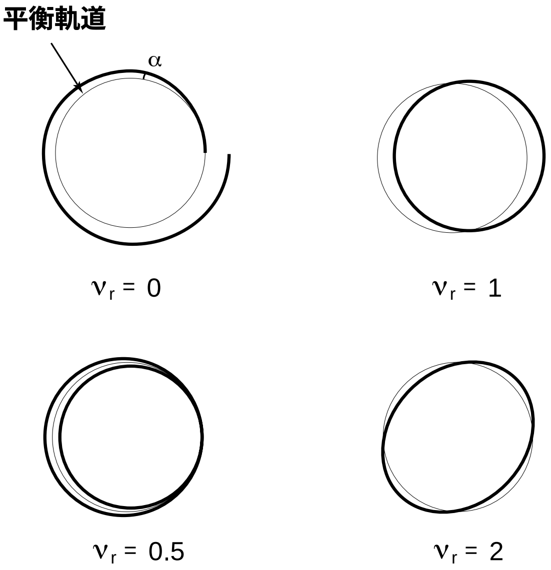


図 I-4

そして、このようなベータトロン振動数を与える磁場の分布はどのようになっているかというと、たとえば、$\nu_r = 0$ のときは $\mu' = -1$ であるから磁場は半径 r に反比例して減少する分布になっているし、$\nu_r = 1$ のときは $\mu' = 0$ であるから磁場は一様な分布になっているのである。

３. 強収束を用いたサイクロトロン

AVF サイクロトロン

前節で見たように、 高いエネルギーまで加速するには等時性磁場を作ればいいわけであるが、 そうすると粒子は発散するという問題が生じることがわかった。

この問題を解決したのが、L. H. Thomas（参考文献３）である。 彼は、方位角方向の磁場分布に交互に強弱をつけることによって、この問題が解決できることを示した。このような磁場分布の中では、粒子の軌道は、磁場の強い hill の領域で曲率半径が小さく、磁場の弱い valley の領域で大きくなって、図 I-5 のように円軌道から歪んだ軌道になる。したがって、軌道は hill と valley の境界を通過するときその境界線に対してある角度をもって通過することになる。こうすることによって、後ほど述べる斜め入射による収束 (edge focusing) の力を発生させて、等時性磁場による発散を補ってやるわけである。

このようなサイクロトロンのことを、AVF (Azimuthally Varing Field) サイクロトロンとか SF (Sector Focusing) サイクロトロンとよんでいる。

（なお、AVF サイクロトロンに関する詳細な取扱いについては、参考文献１、３、４を参照のこと。）

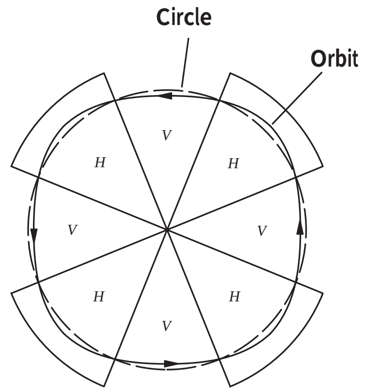


図 I-5

図 I-5 のように hill のエッジがストレートな**ラジアルセクター型** AVF サイクロトロンの中での粒子の運動について考えてみよう。この場合では、hill に入るときと出るときでどちらも同じ大きさの収束力が働く。

先ず、方位角方向の磁場分布が、

$$B_z = \bar{B}(1 + f\cos N\theta) \tag{I.23}$$

で与えられるような分布の場合（**cosθ 型**）について考えてみる。ここで、f はモジュレーションで、N はセクターの数である。この分布は、図 I-6 のような磁極によって作られる。

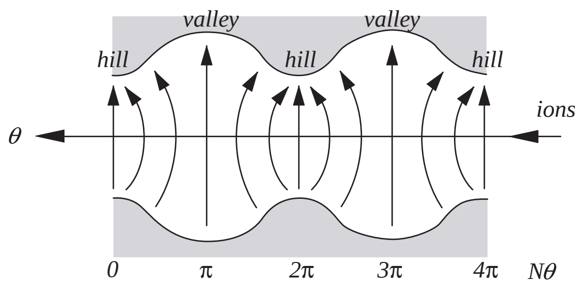


図 I-6

そうすると、円軌道 R からのずれ x_f に対する運動方程式は、

$$-qv\bar{B}f\cos N\theta = m\ddot{x}_f \tag{I.24}$$

となり、その解は、

$$x_f = \frac{fR}{N^2}\cos N\theta \tag{I.25}$$

のように磁場のモジュレーションに対応して $\cos N_\theta$ に比例したものとなる。円軌道からずれたこの軌道 r (= R + x_f) が、この磁場の中での平衡軌道になる。そのため、メディアン

プレーンからずれた位置での磁場の方位角方向の成分ベクトルと粒子の速度の動径方向の成分ベクトルは有限の角度をもち、そのことによって、粒子には z 方向の収束力が働くことになる（斜め入射による収束）。速度の動径成分と磁場の方位角成分の大きさは、それぞれ、

$$v_r = \omega \frac{dx}{d\theta} = -\frac{\omega f R}{N}\sin N\theta \tag{I.26}$$

$$B_\theta = \frac{\partial B_\theta}{\partial z} z = \frac{\partial B_z}{R\partial\theta} z = -z\frac{\overline{B} f N}{R}\sin N\theta \tag{I.27}$$

$$(\because\ \nabla \times \vec{B} = 0)$$

となるので、z 方向に働く力は、

$$F_z = -q v_r B_\theta = -m\omega^2 f^2 z \sin^2 N\theta \tag{I.28}$$

となり z に比例する。この力は常に収束力となることがわかる。ここで、時間平均をとると、$\sin^2 N_\theta$ の平均は 1/2 になり、平均の力は、

$$\overline{F_z} = -m\omega^2 f^2 z\,\overline{\sin^2 N\theta} = -\frac{1}{2} m\omega^2 f^2 z \tag{I.29}$$

となる。したがって、運動方程式は、

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \mu'\omega^2 z + \frac{1}{2}\omega^2 f^2 z = \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_z^2 z = 0 \tag{I.30}$$

または、

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + \left(\frac{1}{2} f^2 - \mu'\right) z = \frac{d^2 z}{d\theta^2} + \nu_z^2 z = 0 \tag{I.31}$$

となり、z 方向のベータトロン振動数は、

$$\nu_z^2 = \frac{\omega_z^2}{\omega^2} = -\mu' + \frac{1}{2} f^2 \tag{I.32}$$

で与えられる。ここで、$1/2\ f^2$ は、

$$F^2 \equiv \frac{\overline{\left(B - \overline{B}\right)^2}}{\overline{B}^2} = \frac{1}{2} f^2 \tag{I.33}$$

で与えられ、この量のことをフラッターとよぶ。これは、磁場のモジュレーションの度合いを表している。

平均磁場分布が等時性磁場の場合、つまり、

$$\overline{B} = \gamma B_c \qquad \left(B_c \equiv \omega m_0 / q\right) \tag{I.34a}$$

$$r = \frac{\beta c}{\omega} \propto \beta \tag{I.34b}$$

の場合、μ' は、

$$\mu' = \frac{r}{\overline{B}}\frac{\partial \overline{B}}{\partial r} = \frac{\beta}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \beta^2\gamma^2 \tag{I.35}$$

となる。

したがって、粒子ビームが収束するための条件は、結局、

$$\frac{1}{2} f^2 > \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \tag{I.36}$$

で与えられる。つまり、フラッターを $\beta^2/(1-\beta^2)$ より大きくすればいいということになる。一方、r 方向のベータトロン振動数は、普通型サイクロトロンと同じく、

$$\nu_r^2 \approx 1 + \mu' = 1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \gamma^2 \tag{I.37}$$

つまり、

$$\nu_r \approx \gamma \tag{I.38}$$

で与えられる。ν_r は γ にほぼ等しいということである。

次に、同じラジアルセクター型 AVF サイクロトロンでも、方位角方向の磁場分布が**階段関数型**の場合について考えてみる。

図 I-7 に示すような磁極の構造をしていて、磁極のギャップが hill のところで狭く valley のところで広くなっているものを考える。そうすると、図 I-8 に示すように、やはり粒子の軌道は円軌道から歪んだ軌道をとり、粒子は hill の部分に κ なる角度をもって入りまた出ていく。またこの場合も、図 I-7 に示されるように、磁力線が hill と valley の境界でゆがみ、そのためその近傍で磁場の方位角成分が生じていることに注意。

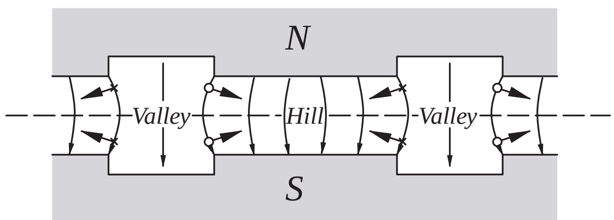


図 I-7

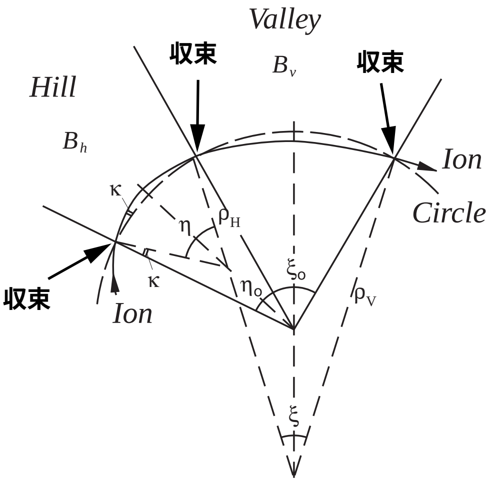


図 I-8

このようにして、その境界のところを通過する時に収束を受けるわけであるが、その力の大きさは κ の値が分かれば求まる。 κ の値は、図 I-8 で $\omega = q/m\,B$ と $B\rho$ = 一定という関係を使って多少面倒な幾何学の問題を解いてやれば、

$$\kappa = \frac{\pi}{N}\frac{\left(B_h - \overline{B}\right)\left(\overline{B} - B_v\right)}{\left(B_h - B_v\right)\overline{B}} \tag{I.39}$$

となる。そして、斜め入射による収束は焦点距離を f として、

$$\frac{1}{f} = \frac{q\Delta B}{m\upsilon}\tan\kappa = G\tan\kappa \tag{I.40}$$

で与えられる（Appendix 参照）。ここで、ΔB は hill と valley の磁場の強さの差である。

これらの値が求まると、後は転送行列を使ってベータトロン振動数が簡単に求まる。z 方向の運動の１ユニット分の転送行列は、hill の中での自由運動、エッジでの収束、valley の中での自由運動、エッジでの収束、のそれぞれの転送行列の積で与えられる。つまり、

$$\begin{aligned} M &= M_0^{'} M_F M_0 M_F \\ &= \begin{bmatrix} 1 & L_V \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -G\tan\kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L_h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -G\tan\kappa & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{I.41}$$

というように F0F0 で与えられることになる。この行列の積を実行して、

$$\cos\frac{2\pi\nu}{N} = \cos\mu = \frac{1}{2}\left(M_{11} + M_{22}\right) \tag{I.42}$$

という関係を使うと、結局、

$$\sin\frac{\mu}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2GL\kappa} \tag{I.43}$$

が得られる。ここで、μ は phase advance とよばれる量である。したがって、z 方向のベータトロン振動数は、

$$\nu_z^2 = -\beta^2\gamma^2 + \frac{\left(B_h - \overline{B}\right)\left(\overline{B} - B_v\right)}{\overline{B}^2} = -\beta^2\gamma^2 + F^2 \tag{I.44}$$

となる。ここで、

$$F^2 \equiv \frac{\overline{\left(B - \overline{B}\right)^2}}{\overline{B}^2} = \frac{\left(B_h - \overline{B}\right)\left(\overline{B} - B_v\right)}{\overline{B}^2} \tag{I.45}$$

である。やはり（I-32）式と同様に、$-\beta^2\gamma^2$ とフラッター F^2 の和で与えられることになる。

では今度は、**スパイラルセクター型** AVF サイクロトロンについて考えてみよう。セクターをスパイラルにする目的は、そうすることによって斜め入射角度を大きくし、より強い収束力を得るためである。図 I-9 にセクターの配置を、また図 I-10 に円軌道と平衡軌道の関係を示す。

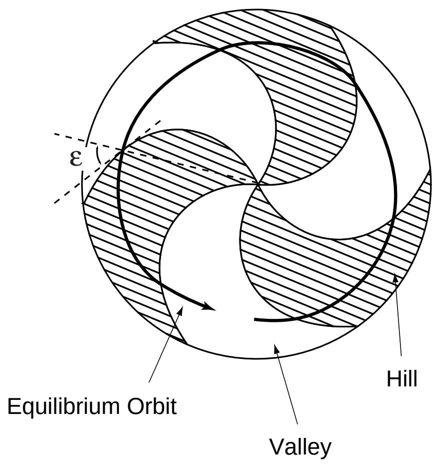


図 I-9

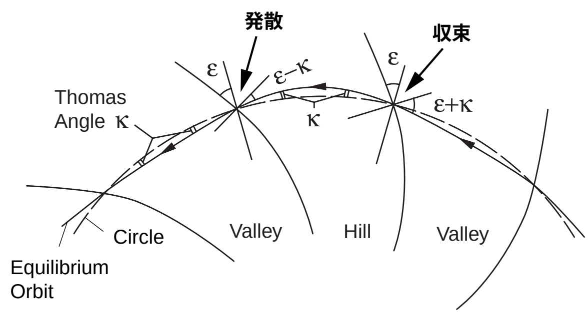


図 I-10

図中の ε のことを、スパイラル角とよぶ。この ε と円軌道とのずれ角 κ（ラジアルセクター型と同じ値）に対して、斜め入射角度が、hill に入るときには ε + κ 、出るときには ε - κ となる。そして、実は、入るときには収束を受けるが、出るときには発散を受けて、トータルでは強い収束を受けるのである。これはまさに、収束・発散を交互に繰り返す AG（Alternating Gradient）収束になっていることを示している。κ はラジアルセクター型と同じ値で、(I.39) 式で与えられる。また、エッジのところでの収束・発散の大きさは、

$$\frac{1}{f} = \pm\frac{q\Delta B}{m\upsilon}\tan(\varepsilon \pm \kappa) = \pm G\tan(\varepsilon \pm \kappa) \qquad \text{(I.46)}$$

で与えられる。

転送行列は FODO で与えられ、

$$\begin{aligned} M &= M_0' M_D M_0 M_F \\ &= \begin{bmatrix} 1 & L_v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G\tan(\varepsilon-\kappa) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L_h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -G\tan(\varepsilon+\kappa) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(I.47)}$$

となり、結局 phase advance は、

$$\sin\frac{\mu}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2GL\kappa(1+\tan^2\varepsilon) + G^2 L_h L_v \tan^2\varepsilon} \qquad \text{(I.48)}$$

で与えられることになる。したがって、スパイラルセクター型 AVF サイクロトロンの z 方向のベータトロン振動数は、

$$\nu_z^2 = -\beta^2\gamma^2 + \frac{(B_h - \overline{B})(\overline{B} - B_v)}{\overline{B}^2}(1 + 2\tan^2\varepsilon) \qquad \text{(I.49)}$$

または、

$$\nu_z^2 = -\beta^2\gamma^2 + F^2(1 + 2\tan^2\varepsilon) \qquad \text{(I.50)}$$

となり、ラジアルセクター型の F^2 による項のファクターに $2\tan^2\varepsilon$ の項が付け加わったことになる。たとえば、ε をだいたい世の中で用いられている値 50° に選ぶと、このファクターは 4 といった大きな値になる。つまり、強い収束力が得られるというわけである。このスパイラルセクター型 AVF サイクロトロンでは、陽子でだいたい 100 MeV ぐらいのエネルギーのものが得られる。

さて、このようにして AVF サイクロトロンのベータトロン振動数を求めてきたわけであるが、これらはいってみれば第 1 近似での値である。さらに高次の項を求めるためには、**磁場のフーリエ展開係数**を使う方法がある。ここでは導出の仕方と結果の式だけを見てみよう。（ 詳細は、参考文献 5 を参照のこと。）

図 I-11 より、運動方程式は、

$$\frac{dr}{d\theta} = r\tan\kappa \qquad \text{(I.51a)}$$

$$\frac{d\kappa}{d\theta} = 1 - r\mu(r,\theta)\sec\kappa \qquad \text{(I.51b)}$$

で与えられる。ここで、

$$\mu(r,\theta) = \frac{q}{m\upsilon}B_z(r,\theta) \qquad \text{(I.52)}$$

である。

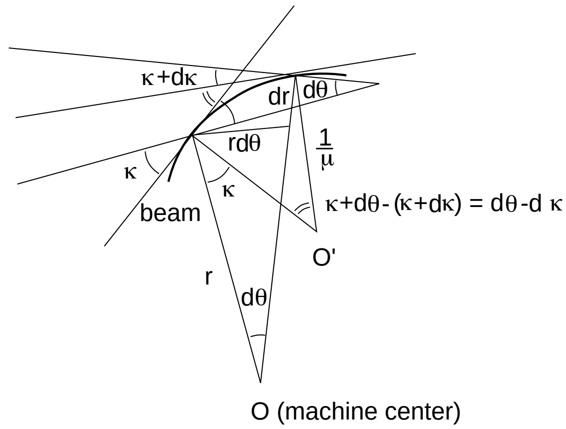


図 I-11

そして、μ (r,θ) のフーリエ展開は、

$$\begin{aligned} \mu(r,\theta) = \frac{1}{r_0}\Bigg\{ & 1 + \mu' x + \mu'' \frac{x^2}{2} + \mu''' \frac{x^3}{6} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta\right] \\ & + x\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n'\cos n\theta + b_n' \sin n\theta\right] \\ & + \frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n''\cos n\theta + b_n'' \sin n\theta\right] + \dots \Bigg\} \end{aligned} \qquad \text{(I.53)}$$

となる。ここで、

$$\mu' = \frac{r_0}{\overline{\mu}}\frac{d\overline{\mu}}{dr}\bigg|_{r=r_0}, \quad \mu'' = \frac{r_0^2}{\overline{\mu}}\frac{d^2\overline{\mu}}{dr^2}\bigg|_{r=r_0} \qquad \text{(I.54a)}$$

$$r = r_0(1 + x) \qquad \text{(I.54b)}$$

である。そうすると、運動方程式は最終的に、

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + x)(\kappa + \frac{1}{3}\kappa^3 + \dots) \qquad \text{(I.55a)}$$

$$-\frac{d\kappa}{d\theta}=(1+\mu')x+\Sigma^0+(\mu'+\frac{\mu''}{2})x^2+x(\Sigma^0+\Sigma')$$
$$+\frac{\kappa^2}{2}+(1+\mu')\frac{\kappa^2 x}{2}+x^2(\frac{1}{2}\Sigma''+\Sigma')$$
$$+\frac{\kappa^2}{2}\Sigma^0+\frac{\mu''' x^3}{6}+\frac{\mu''}{2}x^3+\dots \qquad \text{(I.55b)}$$

で表される。ここで、Σ^0、Σ'、Σ'' は、それぞれ、(I-53) 式の第５、６、７項の級数を表している。

z 方向のベータトロン振動数は、

$$\frac{d^2 z}{ds^2}-\frac{\partial\mu}{\partial n}z=0 \qquad \text{(I.56)}$$

から求められる。ここで、s は平衡軌道に沿っての距離であり、$\partial u/\partial n$ は平衡軌道の曲率を外向きに垂直な方向に微分したもので、

$$\frac{\partial\mu}{\partial n}=\frac{1}{r_0}\frac{\partial\mu}{\partial x}\cos\kappa-\frac{\sin\kappa}{r}\frac{\partial\mu}{\partial\theta} \qquad \text{(I.57)}$$

である。逐次近似を用いるなどして (I.57) 式を計算すると、ラジアルセクター型の場合、

$$\nu_z^2=-\mu'+F^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n'^2+b_n'^2}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n'^2+b_n'^2}{n^4}$$
$$+\frac{1}{4}\left[2-\frac{d}{dx}-\frac{d^2}{dx^2}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{n^2}+\dots \qquad \text{(I.58)}$$

となり、スパイラルセクター型の場合、

$$\nu_z^2=-\mu'+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2(1+2\tan^2\varepsilon_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2\tan^2\varepsilon_n}{n^2}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4})A_n'^2+\frac{1}{4}\left[2-\frac{d}{dx}-\frac{d^2}{dx^2}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{n^2}+\dots$$
$$\text{(I.59)}$$

となる。ここで、

$$\tan\varepsilon_n=r\frac{d}{dr}\phi_n(r) \qquad \text{(I.60a)}$$

$$a_n(r)=A_n(r)\cos n\phi_n(r) \qquad \text{(I.60b)}$$

$$b_n(r)=A_n(r)\sin n\phi_n(r) \qquad \text{(I.60c)}$$

である。$\phi_n(r)$ は、フーリエ成分の位相の定数項である。どちらの場合も、第１項と第２項は転送行列を使った解析で得られた項で、それ以外が高次の項である。

一方、r 方向のベータトロン振動数は、ラジアルセクター型の場合、

$$\nu_r^2=1+\mu'+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2-1)(n^2-4)}(a_n^2+b_n^2)$$
$$+\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-8}{(n^2-1)(n^2-4)}(a_n^2+b_n^2)+\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{n^2-1}$$
$$+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n'^2+b_n'^2}{(n^2-1)(n^2-4)}+\dots \qquad \text{(I.61)}$$

で、スパイラルセクター型の場合、

$$\nu_r^2=1+\mu'+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2A_n^2}{(n^2-1)(n^2-4)}$$
$$+\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-8}{(n^2-1)(n^2-4)}A_n^2+\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{n^2-1}$$
$$+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\tan^2\varepsilon_n}{(n^2-1)(n^2-4)}A_n^2+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n'^2}{(n^2-1)(n^2-4)}+\dots$$
$$\text{(I.62)}$$

となる。ここで、ひとつ面白いことがわかる。n = 1 と 2、つまりセクター数が 1 の場合と 2 の場合には（I.61）式も（I.62）式も適用できない。これは何を意味するかというと、セクター数が 1 の場合、つまり hill と valley が半円ずつで構成されている場合には、粒子がその境界にそってドリフトして運動が安定でないことに対応し、また、セクター数が 2 の場合は、後ほど述べる共鳴によって禁止されていることに対応しているのである。

このようにして得られるベータトロン振動数の値は、実際の磁場の中を運動する粒子の運動方程式を数値積分して得られる値に良く一致する、ことがわかっている。

<u>リングサイクロトロン</u>

L. H. Thomas が考え出した AVF サイクロトロンによって加速できるエネルギーは飛躍的に上がったわけであるが、それでも最高エネルギーは陽子で 100 MeV 程度が限界である。

そこで、より高いエネルギーまで加速できるようにしたものが、これから述べるリングサイクロトロンである（参考文献６）。

このリングサイクロトロンは、分離セクター型サイクロトロンともよばれていて、AVF サイクロトロンの valley 部の磁場をゼロにしたものである。そうすることによって、斜め入射による力の式の ΔB が大きくなり非常に強い収束力が得られることになるわけである。図 I-12 に、４セクターと６セクターのラジアルセクター型リングサイクロトロンを示す。もちろん、スパイラルセクター型のリングサイクロトロンもある。現在、リングサイクロトロンは世界に 7 台ある。たとえば、スイスの PSI では陽子を 590 MeV まで加速し、RCNP では 400 MeV まで加速し、理研では 210 MeV まで加速している。もっとも、理研の場合はウランまでの重イオンを加速できるということが特徴である。

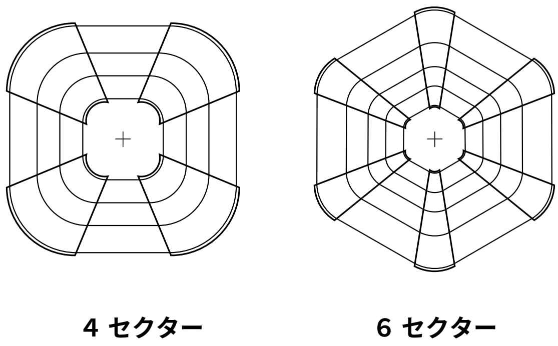


図 I-12

リングサイクロトロン中での平衡軌道の性質とそのまわりの線型振動を解析するためには、磁石配置の対称性から１セクターの半分について調べれば十分である。今、図 I-13 のような N セクターでセクター角が 2α のラジアルセクター型のリングサイクロトロンについて考えてみよう。

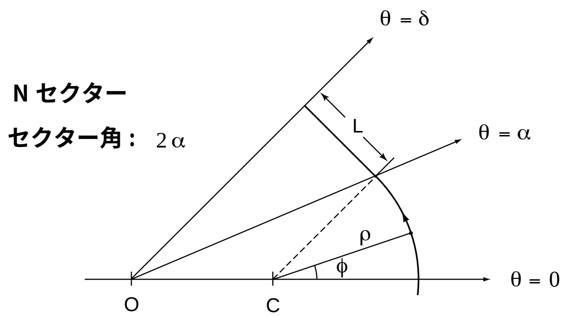


図 I-13

粒子は、セクター電磁石の中（hill）では C を曲率中心とする円軌道を描き、斜め出射角 δ − α でエッジを通過し、その後 valley のところでは直線運動をする。 それぞれのパラメータの関係は、簡単な幾何学から求まり、それらは、

$$
\begin{aligned}
&\delta = \pi / N && L = a(\rho\delta) \\
&\alpha = (\Delta\theta)/2 = f\delta && a = b(\sin\delta)/\delta \\
&OC = b\rho && s_0 = \rho\delta \\
&b = (\sin(\delta - \alpha))/(\sin\alpha) && s_1 = \rho\delta + L = \rho\delta(1 + a)
\end{aligned}
\qquad \text{(I.63)}
$$

で与えられる。平衡軌道の周長は、

$$2Ns_1 = \upsilon T \qquad (\upsilon = \rho\omega) \qquad \text{(I.64)}$$

となる。一方、等時性磁場は 各 ρ に対して、

$$B(\rho) = (m_0\omega / q)\gamma \qquad \text{(I.65)}$$

となっている。磁石中の円軌道に沿って磁場は一定である。もちろん、平衡軌道毎に C の位置や ρ は変わり、磁場もそれに応じて変わる。

平衡軌道のまわりの粒子の線型運動は、図 I-14 のように平衡軌道上の点 Q とそれから少しずれた点 P の間の幾何学的関係から求まる。

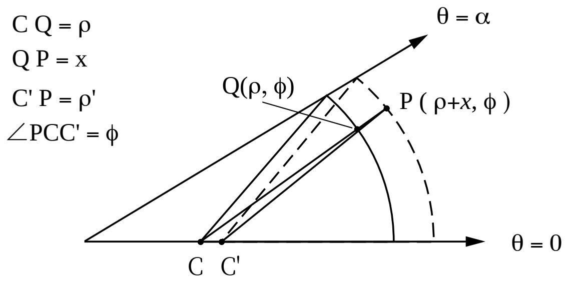


図 I-14

図 I-14 中の ρ、ρ'、x の間の関係

$$(\rho')^2 = (\rho + x)^2 + b^2(\rho' - \rho)^2 - 2b(\rho' - \rho)(\rho + x)\cos\phi \qquad \text{(I.66)}$$

から、磁場の展開式

$$B(\rho') = B(\rho) + x\frac{dB}{d\rho}\frac{\partial\rho'}{\partial x} \qquad \text{(I.67a)}$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial x} = \frac{1}{1 + b\cos\phi} \qquad \text{(I.67b)}$$

が得られる。このようにして、Q の点での field index k （これは (I.4) 式で定義された μ' と同じパラメータ）

$$k = \frac{\rho}{B}\frac{\partial B}{\partial x} \qquad \text{(I.68)}$$

が得られることになる。それは、

$$k(\phi) = \frac{\beta^2\gamma^2}{1 + b\cos\phi} \qquad \text{(I.69)}$$

で与えられる。 ここで、たとえば (I.63) 式中の f が 1 のとき、つまり全部セクター電磁石で占められている場合には、当然ながら $\beta^2\gamma^2$ になる。

このように、磁石中の k の値がわかったので、そこでの粒子の運動が、方程式

$$\frac{d^2x}{d\phi^2}+\left[1+k(\phi)\right]x=0 \qquad \text{(I.70a)}$$

$$\frac{d^2z}{d\phi^2}+k(\phi)z=0 \qquad \text{(I.70b)}$$

を解くことによって求まる。そのときの位置と運動量の平衡軌道からのずれの関係は、

$$p_x=p\frac{dx}{ds}=\gamma\frac{dx}{d\phi} \qquad \text{(I.71a)}$$

$$p_z=p\frac{dz}{ds}=\gamma\frac{dz}{d\phi} \qquad \text{(I.71b)}$$

で与えられる。ここで、s は軌道に沿っての距離であり、p は modified cyclotron unit とよばれる量

$$p=(\beta\gamma)(c/\omega)=\rho\gamma \qquad \text{(I.72)}$$

である。

また、すでに見たとうり、粒子がセクター電磁石のエッジを通過するときに力を受ける。それは、z 方向には収束力として働き、x 方向には実効的に発散力として働く。その力の大きさは、ハードエッジ近似、つまり磁場の強さが突然ゼロになる近似では、

$$k_{edge}=-\tan(\delta-\alpha)\,\Delta\,(\phi-\delta) \qquad \text{(I.73)}$$

で与えられる。ここで、$\Delta(\phi\text{-}\delta)$ は Dirac のデルタ関数である。この力によって、粒子の運動量は、

$$\Delta p_x(S_o)=+\,\gamma\tan(\delta-\alpha)\,x(S_o) \qquad \text{(I.74a)}$$

$$\Delta p_z(S_o)=-\,\gamma\tan(\delta-\alpha)\,z(S_o) \qquad \text{(I.74b)}$$

だけの変化を受ける。

その後、valley の部分ではもちろん直線運動をする。このように、磁石中の運動方程式が与えられ、edge-focusing の強さが与えられ、valley 部は直線運動であるから、これで１セクター分の転送行列が数値計算で求まることになったわけである。その行列 M(s) から、ベータトロン振動数が得られる。すなわち、行列

$$M(s)=I\cos\mu+J(s)\sin\mu \qquad \text{(I.75a)}$$

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{(I.75b)}$$

$$J=\begin{pmatrix}\alpha(s) & \beta(s)\\ -\gamma(s) & -\alpha(s)\end{pmatrix} \qquad \text{(I.75c)}$$

から、

$$\mu=\frac{2\pi\nu_y}{N}=2\nu_y\delta \qquad \text{(I.76)}$$

の関係を使って、ベータトロン振動数が求まるのである。ここで、y は x または z を代表する記号である。また、$\alpha(s)$、$\beta(s)$、$\gamma(s)$ は **Twiss パラメータ**とよばれる量で、これらの値がわかれば軌道上の各点でのビームの広がり等の振舞いがわかるのである（ Twiss パラメータについては別の教科書を参照のこと）。

数値計算で求めたベータトロン振動数の１例を図 I-15 に示す。４セクターでセクター角が 50^o の場合について計算したものである。ハードエッジ近似の場合、ν_Z が、入射点で 0.9 、取出し点で 0.75 ぐらいで、その間を動いていることがわかる。

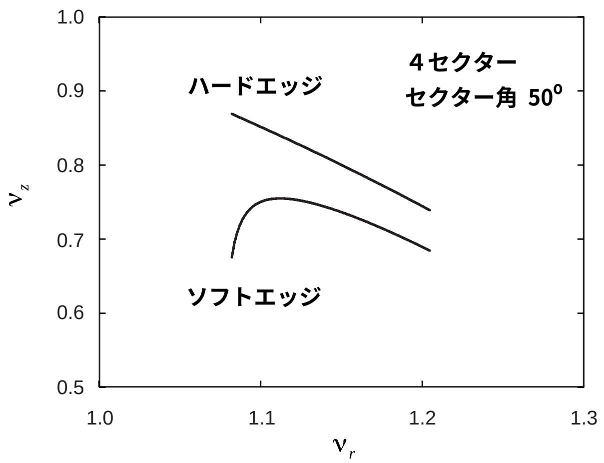


図 I-15

なお、実際にはエッジのところの磁場は突然ゼロになることはなく、だらだらとした分布をするので、その効果を取り入れたソフトエッジ近似の結果も図 I-15 に示した。ソフトエッジ近似では（参考文献７）、

$$\frac{1}{f}=-\frac{1}{\rho}\tan\left(\beta-\psi\right) \qquad \text{(I.77)}$$

$$\psi=K_1\left(\frac{g}{\rho_0}\right)\left(\frac{1+\sin^2\beta}{\cos\beta}\right)\left[1-K_1K_2\left(\frac{g}{\rho_0}\right)\tan\beta\right] \qquad \text{(I.78)}$$

で示されるようにハードエッジ近似での edge-focusing 力より弱い力になる。ここで、β は斜め入射角、g は磁極のギャップ、K_1 と K_2 は定数である。また、ψ の式の分母に ρ_0 が入っているので、半径の小さいところでその弱まり方の傾向が顕著になる。したがって、図のような振舞いを示すように

なるのである。

実は、これは理研リングサイクロトロンについて計算した例で、このソフトエッジ近似で得られるベータトロン振動数の値は、実際の測定磁場の中を運動する粒子の運動方程式を数値積分して得られる値に良く一致することが確かめられている。

ここではラジアルセクター型のリングサイクロトロンだけについて述べたが、AVF サイクロトロンのところで述べたスパイラルエッジでの収束／発散の取扱いを適用することによって、スパイラルセクター型のリングサイクロトロンの場合ももちろん計算することができる。

さてここで、**固有楕円**（**eigen-ellipse**）というものを定義しておこう。一般に、粒子集団の形は Twiss パラメータを使って、

$$\gamma(s)y^2 + 2\alpha(s)yp_y + \beta(s)p_y^2 = \varepsilon \qquad \text{(I.79)}$$

のような楕円で与えられる。ここで、πε はエミッタンスである。

固有楕円は、M(s) を繰り返し作用させて得られる (y,p_y) 点が形成する楕円として定義される。対称性から、１セクター分の両端では同じ楕円になり、またその楕円は直立した楕円になる。

また、ビームの広がりは Twiss パラメータを使って、

$$\Delta y = 2\sqrt{\varepsilon\beta(s,E)} \qquad \text{(I.80a)}$$

$$\Delta p_y = 2\sqrt{\varepsilon\gamma(s,E)} \qquad \text{(I.80b)}$$

のように与えられる。

では、リングサイクロトロンでの Twiss パラメータ α, β, γ の振舞いについて見てみよう。

セクター磁石の中とバレー部での α, β, γ は、微分方程式

$$p(d\beta/ds) = -2\alpha(s) \qquad \text{(I.81a)}$$

$$p(d\gamma/ds) = 2K(s)\alpha(s) \qquad \text{(I.81b)}$$

$$p(d\alpha/ds) = K(s)\beta(s) - \gamma(s) \qquad \text{(I.81c)}$$

から求まる。ここで、K の値は、磁石の中では、

$$K_x = (p/\rho)^2(1+k) \qquad \text{(I.82a)}$$

$$K_z = -(p/\rho)^2 k \qquad \text{(I.82b)}$$

で与えられ、バレー部ではゼロになる。

エッジのところでは、α が、

$$\Delta\alpha_e = \pm(p/\rho)\tan(\delta-\alpha)\beta_e \qquad \text{(I.83)}$$

のように z 方向と x 方向でそれぞれ反対向きに変化する。z 方向の場合 ＋ で、x 方向の場合 − である。

また、Twiss パラメータの性質から、β と γ はリングサイクロトロンの対称点に関して対称、α は非対称となる。したがって、α は対称点の位置ではゼロとなる。

理研リングサイクロトロンの場合について、ハードエッジ近似で計算した Twiss パラメータの振舞いを図 I-16 に示す。左側が x 方向、右側が z 方向の値である。とくに、ビームの実空間での幅に対応する β 関数について見てみると、z 方向ではエッジのところで最大になることがわかる。また、x 方向では hill 中心で最大で、valley 中心で最小になることがわかる。

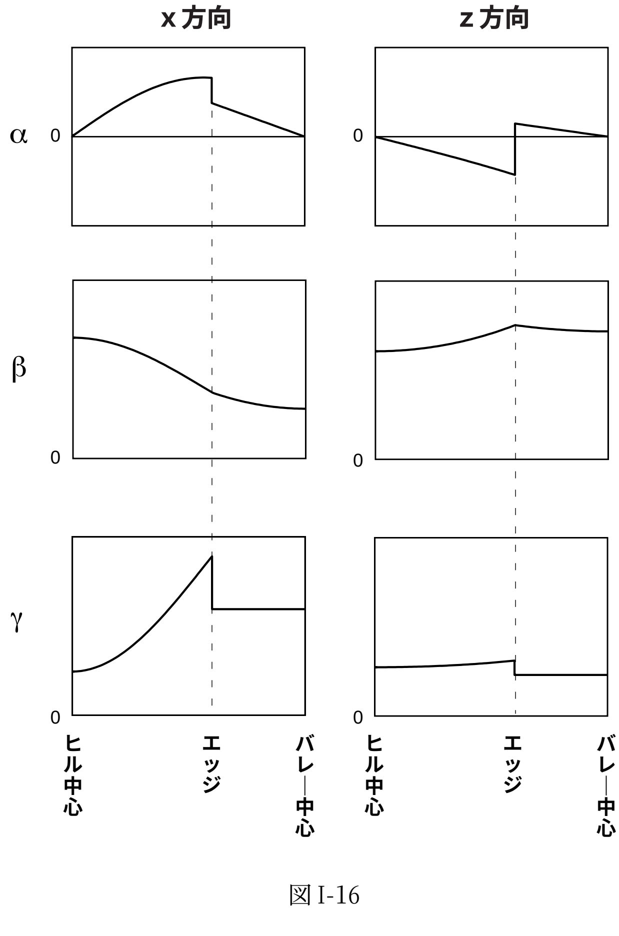


図 I-16

４. 空間電荷効果

これまで議論してきたベータトロン振動数の値は、ビーム電流がゼロとしたときの値であった。しかし、実際には、ビーム電流は有限の値をもっており、したがってビーム内の粒子同士には反発力（発散力）が働く。そのため、ベータトロン振動数の値もシフトする、といった事態が生じる。

ここでは、この反発力の効果すなわち空間電荷効果

（space charge effect）を、横方向と縦方向に分けて考えてみよう。（詳細は、参考文献８を参照のこと。）

先ず、**横方向の空間電荷効果**であるが、この反発力は動径方向の単純な発散力として働くとして計算すればよい。つまり、サイクロトロンの（動径方向の）収束作用を弱める働きをするわけだから、ベータトロン振動数は小さくなる方向にシフトする。そして、値がゼロになるときが加速できるビーム電流強度の限界、ということになる。サイクロトロンではν_zの方がν_rより小さいということと、z 方向の運動はビームチェンバーや RF キャビティの開口で制限されるということから、そのビーム電流限界は z 方向で決まる。そして、その限界値は、

$$I_{\lim}=\frac{A}{Q^2}\frac{\varepsilon_N\nu_z}{R}\beta^2\gamma^2\frac{\Delta\phi}{2\pi}I_0 \tag{I.84}$$

または、より正確な表式として、

$$I_{\lim}=\frac{1}{4}\left(\frac{A}{Q}\right)I_0\,\beta\,\nu_z^2\left(\frac{b_{\max}}{R_\infty}\right)^2\left(\frac{\Delta\phi}{2\pi}\right) \tag{I.85}$$

で与えられる。ここで、A は質量数、Q は電荷数、ε_N は規格化エミッタンス、R は半径、$\Delta\phi$ は位相幅、I_0（= 31 MA）は定数、b_{max} はビームチェンバーの半ギャップである。また、

$$R_\infty=c/\omega_0=hc/\omega_{rf}=hc/\left(2\pi f_{rf}\right) \tag{I.86}$$

である。

I_{lim} は β と $\Delta\phi$ に比例することがわかる。つまり、I_{lim} は低エネルギーの強くバンチしたビームで決まることになるのである。

縦方向の空間電荷効果については、サイクロトロンでは固有の考察が必要である。この空間電荷力によって、中心粒子より先にある粒子はエネルギーを得て、後ろにある粒子はエネルギーを失う。そのため、ビームは前後に広がろうとする。ところが、サイクロトロンには等時性という性質があるので、このエネルギーの広がりは動径方向のビームの傾きとなって現れるのである。エネルギーを得た前方部分にある粒子は半径の大きい方へ、エネルギーを失った後方部分にある粒子は半径の小さい方へ動くからである。

N 回転後のエネルギーの広がり $q\Delta U_{sc}$ は、粒子の密度分布が一様な線型モデルでは、

$$\Delta U_{sc}=2.8k\Omega\,\langle I\rangle\frac{2\pi}{\Delta\phi}\cdot\frac{N^2}{\beta_{\max}} \tag{I.87}$$

で表される。ここで、<I> は平均ビーム電流、β_{max} は最終速度（と光速との比）である。エネルギーの広がりは、回転数の２乗に比例し、位相幅に反比例することがわかる。

このようにして動径方向に傾いたビームは、実効的にターンセパレーションを小さくし、やがてはターンが重なってシングルターン (single turn) 取出しができなくなるということになる。

しかし、この線形モデルで傾いたビームは、実は RF 加速の位相をトップの位相からずらすことによって補償することができる。したがって、問題は非線形部ということになる。今、この非線型部の効果が線型部の効果にファクター f_n をかけたものとして、つまり、

$$\delta U_{sc}\le f_n\Delta U_{sc} \tag{I.88}$$

として与えられると仮定しよう。PSI の W. Joho たちの解析によると、f_n は 0.3 程度である。したがって、ターンが分離している条件は、

$$\delta U_{sc}< V_1 \tag{I.89}$$

となる。これは１ターン当たりの RF によるエネルギーゲインが空間電荷力によるエネルギーの広がりの非線型部より大きいという条件である。この条件に対するビーム電流限界は、

$$I_{\lim}=\frac{U_f}{f_n\,2.8k\Omega}\left(\frac{\Delta\phi}{2\pi}\right)\frac{\beta_{\max}}{N^3}\propto V_1^3 \tag{I.90}$$

で表される。ここで、

$$NqV_1=qU_f \tag{I.91}$$

すなわち、qU_f は最終エネルギー、V_1 は RF 電圧ゲインである。

ビーム電流限界値は位相幅に比例し、回転数の３乗に反比例することがわかる。回転数 N は RF 加速電圧 V_1 に反比例するので、限界値は結局 RF 加速電圧の３乗に比例して増加することになる。

空間電荷効果によるビーム電流限界の例を、理研の AVF サイクロトロンとリングサイクロトロンで見てみよう。

AVF サイクロトロンの例では、$^{14}N^{5+}$ イオンに対して、E_{inj} = 3.6 keV/nucleon、E_{ext} = 7 MeV/nucleon、$\Delta\phi = 10^o$、ν_z = 0.2、b_{max} = 1 cm、N = 100、f = 16.3 MHz、h = 2 といった値を (I.85) 式および (I.90) 式に代入すると、<u>横方向で 190 eμA、縦方向で 80 eμA</u> になる。リングサイクロトロンの例では、$^{14}N^{7+}$ イオンに対して、E_{inj} = 7 MeV/nucleon、E_{ext} = 135 MeV/nucleon、$\Delta\phi = 10^o$、ν_z = 0.7、b_{max} = 2.5 cm、N = 320、f = 16.3 MHz、h = 5 といった値を代入すると、<u>横方向で 380 emA、縦方向で 140 eμA</u> になる。リングサイクロトロンでは、横方向の空間電荷効果による限界値は十分大きいが縦方向の効果による限界値は大きいとは言えず現実に問題となるほどの値である、ことがわかる。また、AVF サ

イクロトロンのビーム電流限界は縦横両方向とも決して大きい値ではないことがわかる。

5.共鳴

サイクロトロンでは、ベータトロン振動数は時間的に一定ではなくて、加速の間 ν_r - ν_z 空間を動く。そして、ν_r や ν_z がある値をとると、ビームは広がったりあるいはとんでもない方向に飛んでいったりして、結局失われる場合がある。これを共鳴(resonance)とよんでいる。したがって、サイクロトロンを設計する際は、ベータトロン振動数がこれらの共鳴をできるだけ横切らないように注意する必要がある。それでも、どうしても横切らざるを得ない場合も起こるわけで、ここでは、共鳴にはどういうタイプのものがあるのか、それはどれだけ危険なものなのかまたは危険なものではないのか、といったことを解析的な手法を用いて見ていこう。(詳細は、参考文献9を参照のこと。)

一般に、ハミルトニアンは、

$$H = H_0 + H_1 \tag{I.92a}$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + \nu_r^2 x^2 + p_z^2 + \nu_z^2 y^2\right) \tag{I.92b}$$

$$H_1 = \sum_{n,m,p} a_{nmp}\, x^n y^m \cos p\left(\theta - \theta_0\right) \tag{I.92c}$$

で表される。ここで、$x = (r - r_0)/r_0$、$y = z/r_0$ である。H_0 は単振動部を表し、H_1 が共鳴を引き起こす摂動部を表している。そうすると、運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \nu_r^2 x = -\sum_{n,m,p} n a_{nmp}\, x^{n-1} y^m \cos p\left(\theta - \theta_0\right) \tag{I.93a}$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + \nu_z^2 y = -\sum_{n,m,p} m\, a_{nmp}\, x^n y^{m-1} \cos p\left(\theta - \theta_0\right) \tag{I.93b}$$

となり、結局、共鳴の条件は、

$$n\nu_x \pm m\nu_z = p \qquad (n, m, p = 0, 1, 2, \cdots) \tag{I.94}$$

で表されることになる。ここで、n、m、p は0または自然数である。

x 方向の運動方程式をあらためて書き下してみると、

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \nu_r^2 = b_0(\theta) + b_1(\theta)x + b_2(\theta)x^2 + c_1(\theta)xy + \cdots \tag{I.95}$$

となる。ここで、b_0は二極磁場誤差、b_1xは四極磁場誤差、b_2x^2は六極磁場誤差、そしてc_1xyは結合共鳴を引き起こす磁場誤差である。

先ず、**二極磁場誤差が引き起こす共鳴**について考えてみよう。

磁場誤差 ΔB は、 p をNで置き換えて、

$$\Delta B(r,\theta) = \varepsilon_N \cos N\left(\theta - \theta_N\right) \tag{I.96}$$

で与えられる。この N のことを、N次ハーモニックスとよぶ。そうすると、中心粒子の変位 x を与える運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \nu_r^2 x = -R\frac{\varepsilon_N}{B_0}\cos N\left(\theta - \theta_N\right) \tag{I.97}$$

のようになる。この微分方程式の特別解は、

$$x_p = -R\frac{\varepsilon_N}{B_0\left(\nu_r^2 - N^2\right)}\cos N\left(\theta - \theta_N\right) \tag{I.98}$$

で与えられる。この特別解は、二極磁場誤差が存在するときの新たな平衡軌道を表している。そして、一般解は、

$$x_g = -R\frac{\varepsilon_N}{B_0\left(\nu_r^2 - N^2\right)}\left[\cos N\left(\theta - \theta_N\right) - \cos\nu\left(\theta - \theta_N\right)\right] \tag{I.99}$$

で与えられる。これは、新たな平衡軌道のまわりの単振動を表している。上の式を変形すると、

$$x_g = -R\frac{2\varepsilon_N}{B_0\left(\nu_r^2 - N^2\right)}\sin\frac{N+\nu}{2}\left(\theta - \theta_N\right)\sin\frac{\nu - N}{2}\left(\theta - \theta_N\right) \tag{I.100}$$

となって、それをグラフにすると図 I-17 のようになる。うなりの振舞いをするのである。

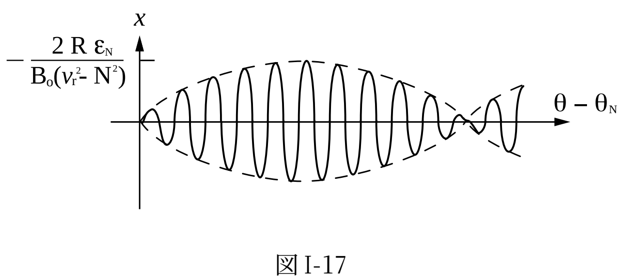


図 I-17

もし、$\nu_r = N$ となったときには、x は、

$$x_{res} = -\frac{R\varepsilon_N}{2B_0N}\left(\theta - \theta_N\right)\sin N\left(\theta - \theta_N\right) \tag{I.101}$$

で与えられ、振幅は θ とともに直線的に増大することになる。つまり、共鳴するわけである。この共鳴のことを、**整数共鳴**とよぶ。

なお、共鳴には幅というものがあって、その幅の中に実効的に滞在するターン数は、

$$n_{eff} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{d\nu_r}{dn}}} \tag{I.102}$$

で与えらる。平方根の中は、１ターン当たりのベータトロン振動数の変化量である。この変化量が、大きければ、つまり幅が小さければ、この共鳴を通過することも可能な場合があるということになる。また、ε_N が小さければ、同じく通過することが可能になる。

次に、**四極磁場誤差が引き起こす共鳴**について考えてみよう。

磁場誤差 ΔB は、

$$\Delta B(r,\theta) = g_N\, x \cos N(\theta - \theta_N) \tag{I.103}$$

で表される。中心粒子の変位 x を与える運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \nu_r^2 x = -R\frac{g_N}{B_o}\cos N(\theta - \theta_N) \tag{I.104}$$

となり、右辺を移行すると、

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \left[\nu_r^2 x + R\frac{g_N}{B_o}\cos N(\theta - \theta_N)\right] x = 0 \tag{I.105}$$

のように Mathieu 方程式になる。

この方程式の振動項は、AG 収束が新たに加わったことを意味している。そのために、ベータトロン振動数がシフトするわけであるが、シフトした後の $\tilde{\nu}_r$ ともともとの ν_r との関係は、

$$\cos\frac{2\pi}{N}\tilde{\nu}_r = \cos\frac{2\pi}{N}\nu_r - \frac{\pi R^2 g_N}{2N\nu_r B_0^2 (N^2 - 4\nu_r^2)}\sin\frac{2\pi}{N}\nu_r \tag{I.106}$$

で与えられる。この式を、$\nu_r = N/2$ の近傍で展開すると、

$$(\tilde{\nu}_r - \frac{N}{2})^2 = (\nu_r - \frac{N}{2})^2 - \Delta\nu_r^2 \tag{I.107}$$

$$\Delta\nu_r = \frac{Rg_N}{2B_0 N} \tag{I.108}$$

のようになって、チューンシフトの値が得られる。この式から、

$$\left|\nu_r - \frac{N}{2}\right| < \Delta\nu_r \tag{I.109}$$

のとき、$\tilde{\nu}_r$ が虚数になる。つまり、ビームが不安定になることを意味している。この共鳴のことを、**半整数共鳴**とよぶ。$2\Delta\nu_r$ はストップバンドとよばれ、禁止領域を表している。

このことから、次のことがわかる。AVF サイクロトロンでは、$\nu_r \approx 1$（かつ等時性サイクロトロンのため勾配磁場がある）であるので、２セクター（N＝2）は使えない。また、リングサイクロトロンでは、３セクターでは $\nu_r = 1.5$ を通過できないし、４セクターでは $\nu_r = 2$ を通過できない。

最後に、**結合共鳴**について見てみよう。

垂直・水平両方向の運動が互いに影響を及ぼすことによって引き起こされる共鳴のことを、結合共鳴とよんでいる。サイクロトロンにおいて典型的な例は、Walkinshaw 共鳴とよばれる共鳴で、水平方向のベータトロン振動数が垂直方向のベータトロン振動数のちょうど２倍

$$\nu_r = 2\nu_z \tag{I.110}$$

になったときに起こる。この共鳴は、等時性磁場が２次の分布をもっているために、誤差磁場がない理想的なサイクロトロン中でも生じる本質的な結合共鳴である。

中心粒子の変位を与える運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \nu_r^2 x = \frac{1}{2}\mu''(y^2 - x^2) \tag{I.111a}$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + \nu_r^2 y = \frac{1}{2}\mu'' xy \tag{I.111b}$$

となる。ここで、

$$\mu'' \equiv \frac{r_0^2}{B_0}\frac{d^2B}{dr^2} \tag{I.112}$$

である。これを解くと、

$$J_0 = \frac{\nu_r}{R^2}(x_0^2 + \frac{1}{4}z_0^2) = \text{一定} \tag{I.113}$$

つまり、水平方向の振動エネルギーと垂直方向の振動エネルギーの和が一定だという関係が得られる。つまり、x、z 両方向間で振動エネルギーの行き来がある、のである。このようにして、x 方向の全てのエネルギーが z 方向に移るとすると、x 方向の振動の振幅が z 方向では、

$$z_0^{\max} = 2x_0^{\max} \tag{I.114}$$

のようにその２倍になる。したがって、もしその振幅が大

きいと、ビームチェンバーの上下の壁にビームが当たって失われる、ということになるわけである。

この共鳴は、シンクロサイクロトロン（ここでは説明しない）では、滞在時間が長いために通過できない共鳴である。しかし、AVF サイクロトロンやリングサイクロトロンでは、加速電圧が高くて共鳴付近に滞在する時間が短いために、ほとんど問題なく通過することができるのである。もちろん、あらかじめ r 方向の振動の振幅を小さく押さえておくことは必要なことである。

この Walkinshaw 共鳴は、バネ振り子と対比させることができる（図 I-18）。バネ振り子で、垂直方向のバネの振動数が水平方向の振り子の振動数のちょうど２倍、

$$\omega_{垂直} = 2\omega_{水平} \tag{I.115}$$

すなわち、

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{I.116}$$

になるように、バネの長さとバネ定数を選んでやれば、同様な共振が得られるのである（参考文献１０）。実際、このようなバネ振り子を作って、最初垂直方向だけの振動をさせると、やがて水平方向の振動も混じり始めそのうち水平方向だけの振動に移行する。そしてその後、また垂直方向の振動が混じり始めやがて元の垂直方向だけの振動に戻る、というように垂直振動と水平振動が互いに移り変わる様子を見ることができる。

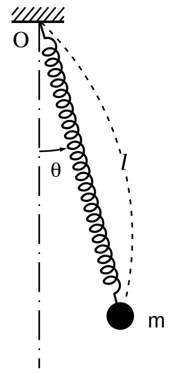


図 I-18

II. 応用編（実践編）

１. 理研のサイクロトロン

図 II-1 は、現在計画が進行中の“ 理研RIビームファクトリー ”の鳥瞰図である。左側半分の部分がすでに稼働している現施設で、リングサイクロトロン (RRC) をメインの加速器として2台の入射器、重イオンリニアック (RILAC) と AVF サイクロトロン (AVF) で構成されている。この複合加速器で、陽子からウランまでの全てのイオンを高いエネルギーにまで加速できるようになっている。そして、右側半分の部分が、平成１０年度から建設が始まった新しい施設

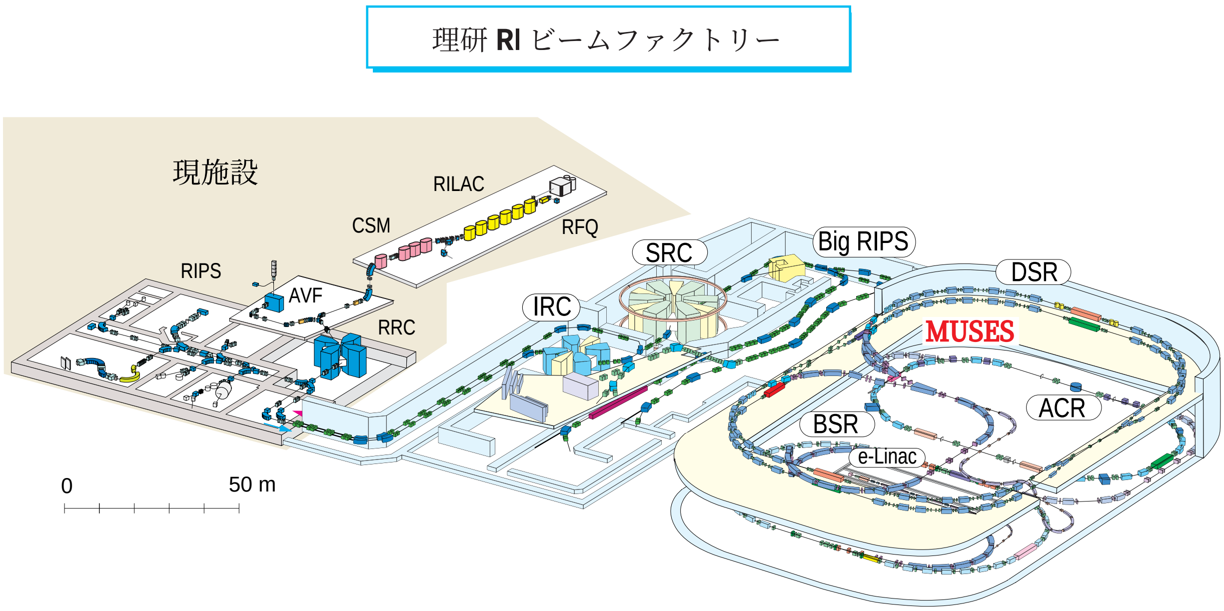


図 II-1

で、RRC より一まわりも二まわりも大きい２台のリングサイクロトロン (IRC と SRC) とその後ろの加速器リング群 (MUSES) で構成されている。その２台のリングサイクロトロンのうち、後ろの方は超電導リングサイクロトロンで、世界中にまだ１台もない全く新しいタイプのサイクロトロンである。

AVF は４セクターのスパイラルセクター型 AVF サイクロトロンで、RRC、IRC、SRC はそれぞれ、４セクター、４セクター、６セクターのラジアルセクター型リングサイクロトロンである。K 値（ $(Q/A)^2$ をかけると核子あたりのエネルギになるような値）はそれぞれ、70、540、980、2,500 MeV、また、取出し半径はそれぞれ、0.74 m、3.56 m、4.15 m、5.36 m である。

筆者たちは、これから作るものも含めて４台のサイクロトロンについて様々なビーム解析を行ってきた。ここでは、とくに RRC を設計するにあたって実際に行ってきたビーム解析について、例を示しながら説明する。

２. 数値計算

ビーム解析における物理的直観とか考え方といったものが正しいかどうか、ということを確かめるためには、サイクロトロンの実際の磁場の中でのビームの振舞いを数値計算でシミュレートする方法を使う。また、もちろんそのシミュレーションの結果自体を知りたい、そしてその結果を入射とか取出しの機器の設計に使う、といったことがある。

そういう訳で、サイクロトロンにおいても数値計算によるビームシミュレーションというものは、重要な役割を果たす。

サイクロトロンでは（r, θ, z）といった円筒座標系を使う。そして、独立変数に時間 t をとると、運動方程式

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}) \tag{II.1}$$

は、

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{m} \tag{II.2a}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{mr} \tag{II.2b}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_z}{m} \tag{II.2c}$$

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{1}{m}\left\{p_\theta\left(\frac{p_\theta}{r} - qB_z\right) + qp_zB_\theta\right\} + qE_r \tag{II.2d}$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{1}{m}\left\{p_r\left(-\frac{p_\theta}{r} + qB_z\right) - qp_zB_r\right\} + qE_\theta \tag{II.2e}$$

$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{1}{m}\left(-qp_rB_\theta + qp_\theta B_r\right) + qE_z \tag{II.2f}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{q}{mc^2}\left(p_rE_r + p_\theta E_\theta + p_zE_z\right) \tag{II.2g}$$

と書き表される。ここで、

$$B_r(r,\theta,z) = z\frac{\partial}{\partial r}B_z(r,\theta,z=0) \tag{II.3a}$$

$$B_\theta(r,\theta,z) = \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}B_z(r,\theta,z=0) \tag{II.3b}$$

$$B_z(r,\theta,z) = B_z(r,\theta,z=0) + \frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial\theta^2}\right) \tag{II.3c}$$

$$E_z(r,\theta,z) = 0 \tag{II.3d}$$

で近似する。

この微分方程式を Runge - Kutta - Gill 法を用いて解くのである。磁場の値は、設計の段階では３次元電磁場計算プログラム等で求めたものを用いる。もちろん、電磁石の製作が終わって磁場の測定データがある場合には、その値を用いる。電場の値は、AVF サイクロトロンの中心領域に対してはやはり３次元電場計算プログラムによるものを用いるが、それ以外は適当に近似した分布を用いる。なお、サイクロトロンの場合は、粒子の回転数が 100 とか、せいぜい数 100 程度であるから、シンプレクティック条件は、少なくとも筆者たちの計算では考慮していない。

３. ベータトロン振動数の振舞い

ベータトロン振動数がどういう値になっているか、ということについて見てみる。

ベータトロン振動数は、以下のようにして計算する。4セクターの場合だと、図 II-2 で表したように、セクター電磁石が作る現実的な磁場の中を、（1,0）と（0,1）という位相空間上の単位ベクトルを持った粒子を 90 ° 分走らせる。もちろん、この時、そのエネルギーに対応した平行軌道はあらかじめ求めておく。そして、90 ° 分走った先での２つの粒子のベクトルを、（a, b），（c, d）とすれば、この間の転送行列 T

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tag{II.4}$$

が求まる。このようにして、T のトレースをとって

$$\cos\frac{2\pi\nu}{N} = \frac{1}{2}trT \tag{II.5}$$

なる関係を使えば、ベータトロン振動数 ν が求まる、のである。

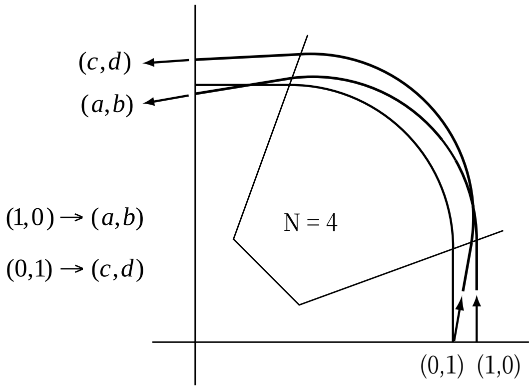


図 II-2

図 II-3 に、AVF でのベータトロン振動数の振舞いをエネルギー毎にプロットしたものを示す。ν_z が 0.2 あたりからスタートして0.6 あたりで取り出されることがわかる。エネルギーが低いので、ν_r はほとんど 1 に近い値をとる。ここで、粒子はWalkinshaw 共鳴を横切ることになるが、シミュレーションの結果とくに目に見えるような共鳴を起こすことなく通過できることが確かめられている。また、実際のビーム加速においてもこの共鳴は起こっていない。加速粒子は、取出しエネルギーが7 MeV/u の $^{14}N^{5+}$ のイオンである。

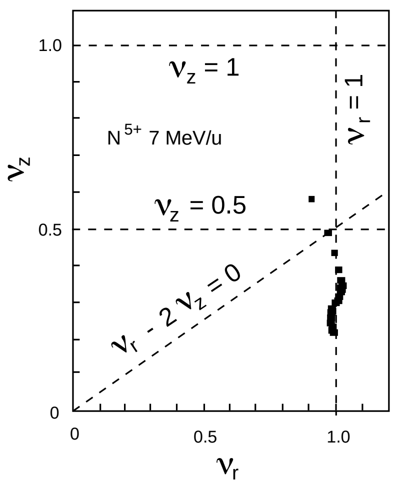


図 II-3

また、図 II-4 に、RRC でのベータトロン振動数の振舞いを示す。p 210 MeV, $^{12}C^{6+}$ 135 MeV/u、$^{2}C^{6+}$ 70 MeV/u、$^{238}U^{40+}$ 13.6 MeV/u について、それぞれプロットした。加速粒子の種類によってベータトロン振動数が異なるわけであるが、これらができるだけ図中波線で示した共鳴に引っ掛からないようにセクター角などを調節するのである。ν_z は 0.7 あたりからスタートして、一旦大きくなってそれから小さくなっている。これは、基礎編のところで述べたソフトエッジ近似で得られる値と良く一致している。ν_r はほぼ γ に比例している。陽子のエネルギー 210 MeV は、$\nu_z = 0.5$ の共鳴で制限されている。また、ここでもWalkinshaw 共鳴は悪さをしないことがわかっている。

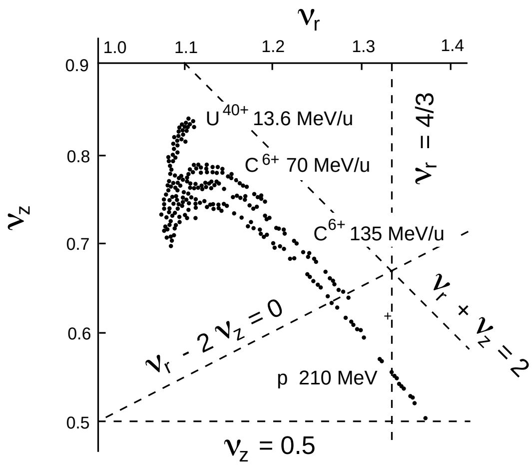


図 II-4

図 II-5 には、SRC でのベータトロン振動数の振舞いを示す。6 セクターのリングサイクロトロンで ν_z は大きくなって、1 を超えている。ここでも、いろんな加速粒子についてそのベータトロン振動数が危険な共鳴線をできるだけ横切らないようにセクター電磁石が設計されている。たとえば、$\nu_z = 1$ の共鳴は非常に危険な共鳴である。SRC では、取出しの領域でセクター角を若干狭めることによって ν_z の値を上に持ち上げて、$\nu_z = 1$ の共鳴を避けている。$\nu_r = 1.5$ の共鳴 は通過可能であることが確かめられている。

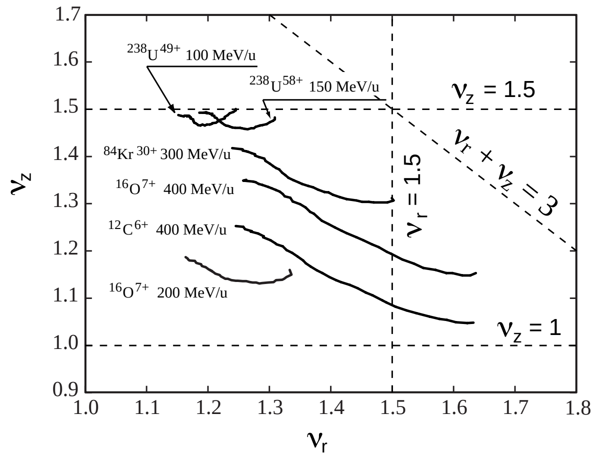


図 II-5

図 II-6 a, b に、この $\nu_z = 1$ の共鳴がどれほど危険かということを確かめたシミュレーションの結果を示す。この共鳴をドライブする力として、この対向するセクター磁石のメディアンプレーンを z 方向にそれぞれ +1 mm と −1 mm だけずらした。そして、わざと共鳴を横切るように、セクター角を調節している。粒子は、z方向にはメディアンプレーンのまわりを振動するので、この 1 mm だけずれたところを通過する度にそれぞれに対応したキックを z 方向にうけるのである。そうすると、z の振幅は、しばらくは小さい値に止まっているが、$\nu_z = 1$の手前で増大し始めて通過した直後に60mm にまで達する。超電導のセクター磁石を1 mm 以下の精度でアラインするのは非常に難しいので、これは現実問題としてこの共鳴を通過できない、ということを意味している。

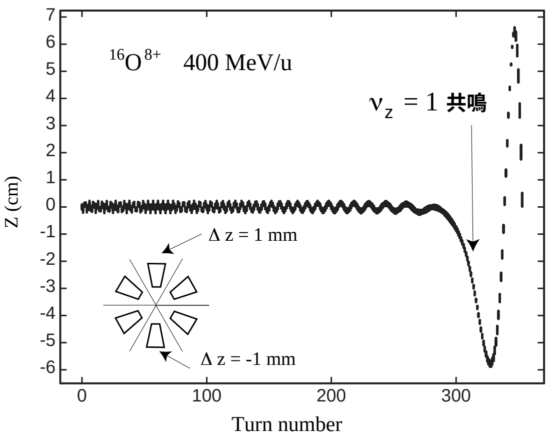


図 II-6a

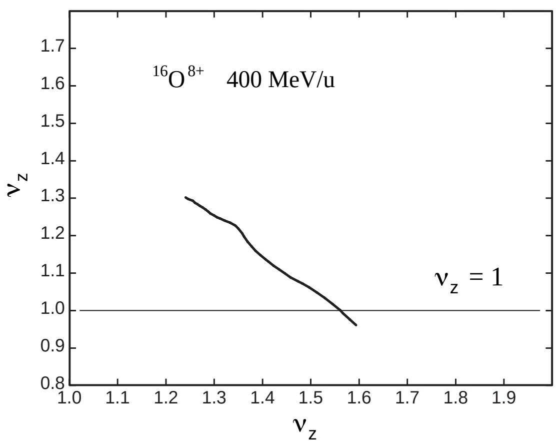


図 II-6b

4. ビーム入射

さて、加速器においては通常は、ビームを入射し、加速し、そして取出すという一連の作業を行う。RRC（や AVF）においても、入射、加速、取出しに関してビームシミュレーションを徹底的に行った。それらについて、詳しく述べる。

この節では、先ずビーム入射について述べる。

図 II-7 に RRC の入射軌道と加速軌道（の一部）を示す。入射器から運ばれてきたビームは、斜め４５度上方から中心領域に入れられ、偏向電磁石、磁気チャンネルで曲げられて、最後は静電インフレクターでほんの少し曲げられて加速軌道へと導かれる。RF 加速共振器が２カ所あって、粒子はそれぞれの共振器の２つのギャップで２回ずつ加速される。

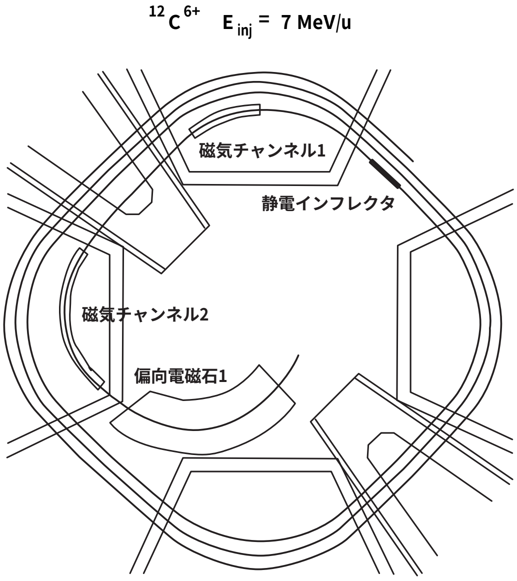


図 II-7

そして、このビームを入射するときには、ただただビームをサイクロトロンに放り込んでやればいいというわけでは決してなくて、以下に掲げるような条件で入射してやる必要がある。そうしないと、一旦サイクロトロンの中に入ったはいいけど、一周してくる間に入射器の壁にあたって失われるとか、取出しのところでビームが広がってきれいに取出せない、といったことが起こる。

質のいいビームを得るためのビーム入射条件としては、以下のようなものがある。

1）ビームセンタリング
2）横（r, z）方向位相楕円のマッチング
3）Central Position 位相（CP phase）マッチング
　- 分散（Dispersion）マッチング -
4）φ−δ 位相空間上でのマッチング

１番目のビームセンタリングとは、ビームの軌道中心をサ

イクロトロンの機械中心にもってくる、ということである。そういうふうに入射するとビームの回転軌道がきれいならせん軌道を描くことになる。２番目の条件は、r とか z 方向の位相楕円をある形をもたせて入射させる必要がある、ということである。３番目の条件は、分散マッチングをとることによって、CP 位相というビームの位相に関しても自動的にうまくマッチングがとれて、ビームがきれいにまわる、という条件である。４番目の条件は、縦方向のエミッタンスもある形（これは楕円ではない）をもたせて入射させる必要がある、ということである。

それぞれの条件について、見ていくことにしよう。

先ず、**ビームセンタリング**の条件であるが、それは図 II-8 のように入射点の位置で第１平衡軌道に対して外向きの傾きα をもってビームを入射させよ、ということである。ここで入射点というのは、図の静電インフレクタの位置のことである。

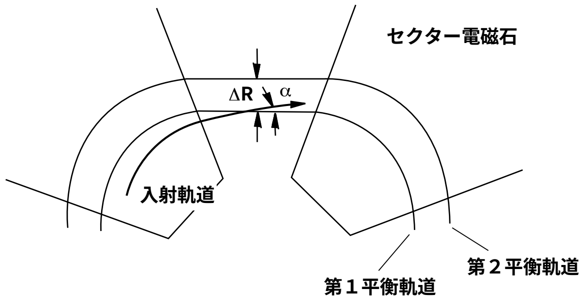


図 II-8

その傾きの大きさは、図 II-9 から得られる。これは位相空間上の図であるが、入射エネルギーE_i に対応した平衡軌道の入射点での動径位置 R_i、途中１回 RF 共振器を通って全部で 180^0 分回転した後の平衡軌道の位置が縦線で示されている。入射点において傾きα*で入ってきた粒子は、その後点Oのまわりを円に沿って移動する。粒子が移動する曲線は一般に図に示すような楕円（固有楕円）であるが、今円になるようにｒ'方向の縮尺を変えている。そのために、実空間での傾きα が位相空間ではα*になっているのである。実空間で 90 ° 回転して加速共振器のところまでくると、位相空間上では 90 ° の ν_r 倍だけ回転する。そして、２ギャップの共振器の部分でεだけ r 方向にシフトして、その後は今度は新しい平衡軌道のまわりを90 ° の ν_r 倍だけ回転する。そうすると、センタリングをとるつまりwell-centered にするということは２つの回転半径が互いに等しくなるようにする、ということである。つまり、

$$\alpha = \alpha^* \frac{r_0'}{r_0} = \frac{\Delta R - \varepsilon}{2\sin(90^0 \nu_r)} \cdot \frac{r_0'}{r_0} \qquad \text{(II.6)}$$

がセンタリング条件を与える式である。このようにして、α*が求まり、後は r' 方向のスケーリングを元にもどしてやるとαが求まる、ということになる。

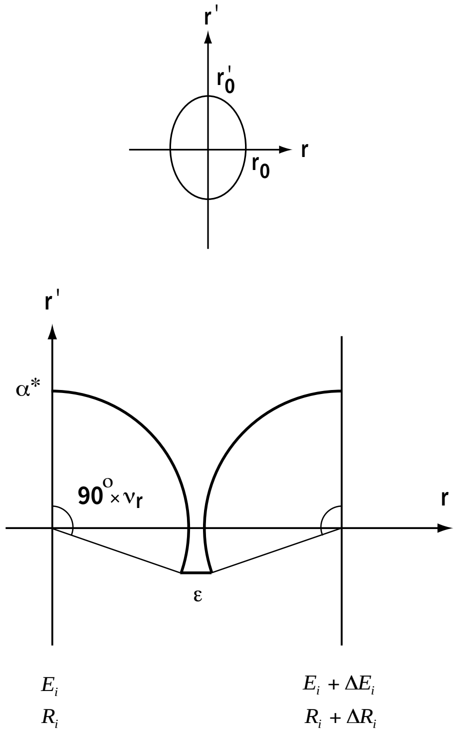


図 II-9

このことを実空間上で見ると、だいたい図 II-10 のようになっている。早い話が、入射点で斜めに入れて、平衡軌道のまわりを縫うように加速しなさい、ということである。このようにして得られる軌道のことを、加速平衡軌道とよぶ。（図では RF 共振器のところで粒子の軌道が不連続になっているが、実際にはもちろん連続に変化している。）

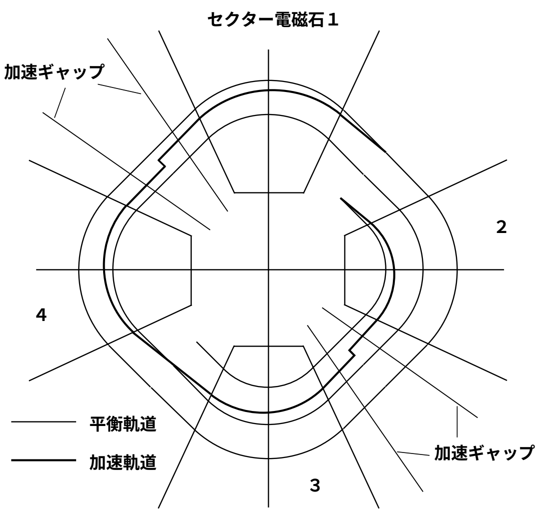


図 II-10

図 II-11 a, b に、加速ビームのパターンのシミュレーションの結果を示す。センタリングを行った場合にはターンの間隔が単調に変化していることがわかる。

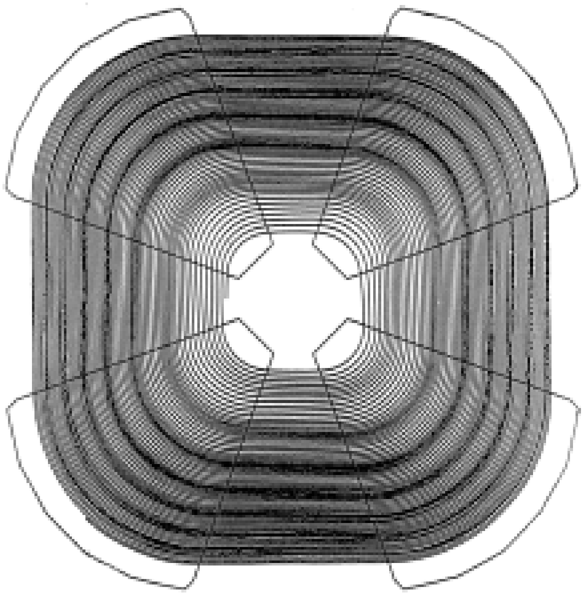


図 II-11 a

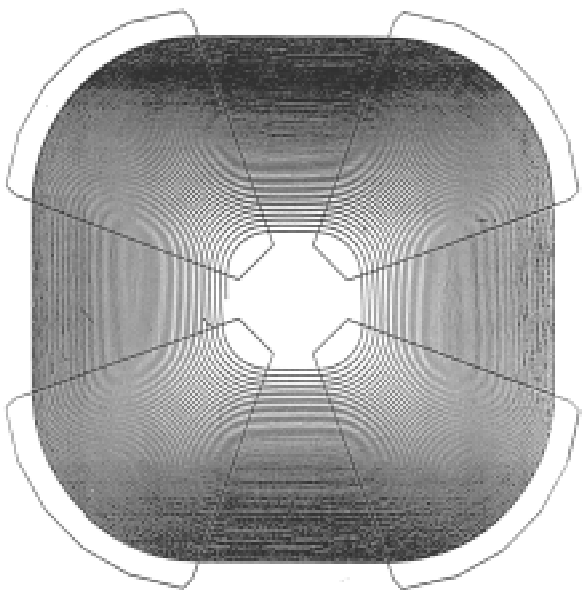


図 II-11 b

ところで、ここで not-centered とか well-centered とか言っているわけであるが、そしてそれらのパターンを見ればだいたい区別がつくわけであるが、そのことをもっと定量的に判断できる量がある。それは、**軌道中心**というものである。これは文字どおり軌道の中心で、もしそれがサイクロトロンの機械中心からずれている場合、実際の軌道は平衡軌道をその軌道中心のベクトル分だけ平行移動したものになる、というものである。（図II-12）

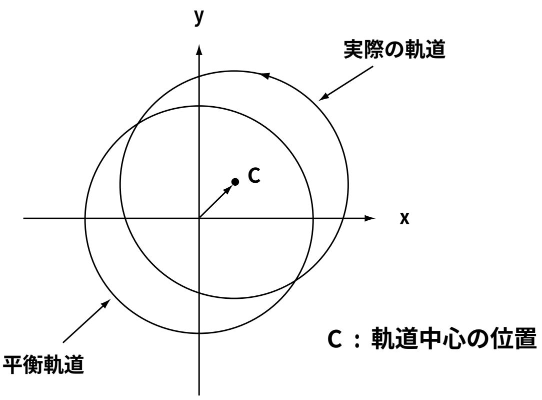


図 II-12

逆に、実際の軌道から軌道中心を引き出す方法として、たとえば、一つは図 II-13 のように１周半分の平均をとる方法がある。その方法だと、軌道中心の（たとえば） x 座標は、

$$x_{oc} = \frac{1}{8}\left(P_1 + 3P_2 - 3P_3 - P_4\right) \quad \text{(II.7)}$$

で与えられる（参考文献１１）。

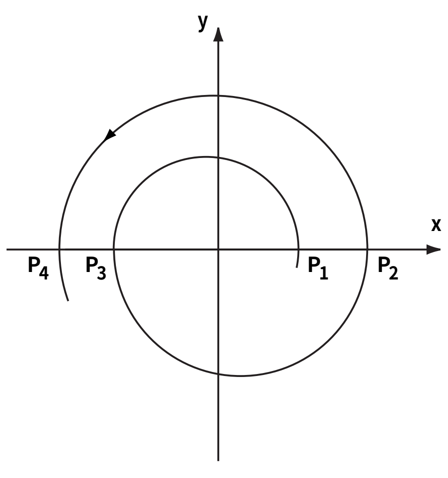


図 II-13

そうすると、ビーム軌道が well-centered であるか not-centeredであるかということは、軌道中心が機械中心の位置にあるかそれともずれているか、ということになる。しかも、ある程度定量的に判断することが可能になるのである。なお、この軌道中心のずれはベータトロン振動の振幅に等しいということが、図 II-12 をじっと眺めればわかるであろう。

図 II-14 は、図 II-11 a、b のビームパターンから、x、y 両方向について (II.7) 式を用いて抽出した軌道中心の運動をプロットしたものである。not-centered の場合は軌道中心が確かに（この場合は）約 10 mm の振幅で回転しており、well-centered の場合は軌道中心が機械中心にとどまっていることがわかる。

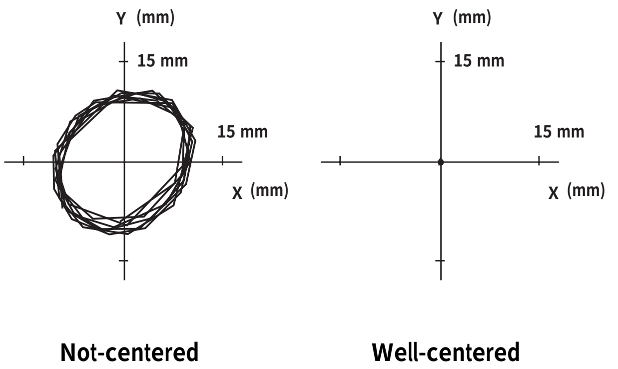


図 II-14

軌道中心の運動についてもう少し見てみる。

ハーモニック磁場が存在しないときは、ハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2}\nu X^2 + \frac{1}{2}\nu Y^2 \qquad (\nu = \nu_r - 1) \tag{II.8}$$

と書ける。ここで、X、Y は軌道中心の X、Y 座標である。したがって、軌道中心の運動は、X-Y 空間上で、図 II-15 のようになる。軌道中心はサイクロトロンの機械中心のまわりを $\nu_r - 1$ の周期で回転する、ということである。言い換えれば、粒子が 1／(ν_r−1) 回転すると軌道中心がやっと 1 回転する、ということになる。たとえば ν_r = 1.1 とすると、粒子が 10 回転すると軌道中心が 1 回転する、ことになるのである。

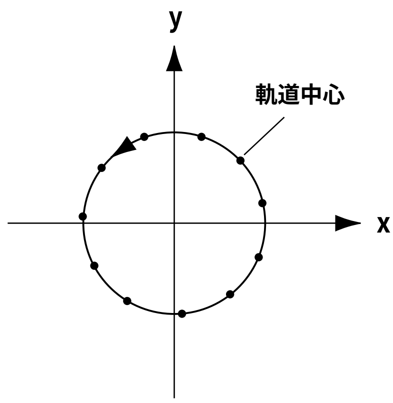


図 II-15

では、1 次ハーモニック磁場が存在するときにはどうなるであろうか？　そのときのハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2}\nu\left[X + \frac{1}{2}\frac{\bar{A}_1 r_0}{\nu}\right]^2 + \frac{1}{2}\nu\left[X + \frac{1}{2}\frac{\bar{B}_1 r_0}{\nu}\right]^2 \tag{II.9}$$

となる。つまり、回転の中心が 1 次ハーモニック磁場の強さに比例した位置 M

$$M = \left(-\frac{\bar{A}_1 r_0}{2\nu}, -\frac{\bar{B}_1 r_0}{2\nu}\right) \tag{II.10}$$

に移ることになる。図 II-16 のように、軌道中心は磁場中心 M のまわりを $\nu_r - 1$ の周期で回転する、ことになるのである。

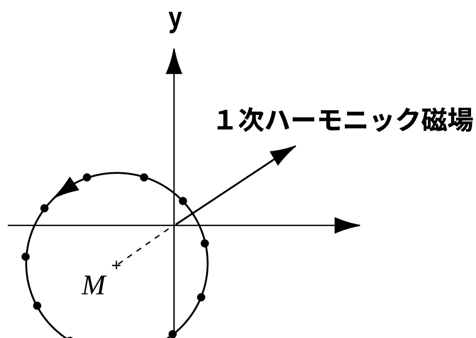


図 II-16

図 II-17 は、RRC において強さが 21 G の1次ハーモニック磁場を W セクターの方向に実際にかけたときの、軌道中心の測定値をプロットしたものである。加速粒子のターンの位置を 3 本のメインプローブで測って、それから軌道中

心を抽出した。軌道中心が磁場中心 M のまわりをたしかに回っていることがわかる。

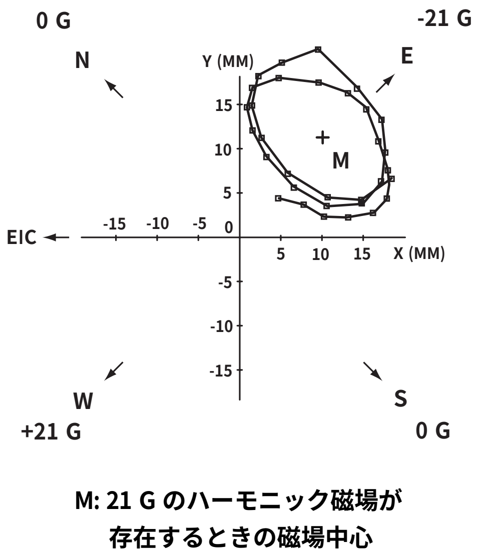


図 II-17

この１次ハーモニック磁場を使えば、たとえ入射点においてセンタリングがうまくいかなかったとしても、その後で入射ビームのセンタリングができる。図 II-18 のように、入射領域に１次ハーモニック磁場をかけて、センタリングが終了したところで磁場をゼロにするわけである。たとえば、図 II-19 のように、軌道中心の描く円軌道が機械中心を通るように１次ハーモニック磁場をかけてやる。そうすると、軌道中心は磁場中心 M のまわりに回転を始め、やがて機械中心にやってくる。そこで磁場をゼロにすれば、それ以後軌道中心は機械中心に止まる。つまりセンタリングができた、ということになるのである。

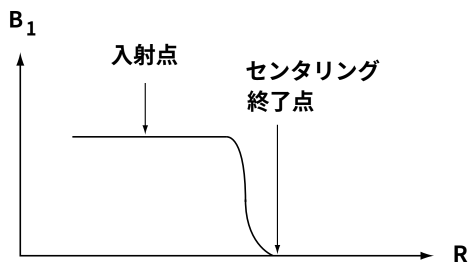


図 II-18

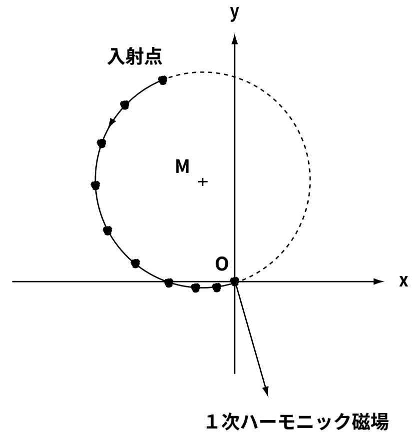


図 II-19

図 II-20 は、RRC において、U イオンの場合について行った入射ビームセンタリングのシミュレーションの例である。強さ 24 G の１次ハーモニック磁場を適当な方向にかければ、約５ターンでセンタリングができることがわかる。

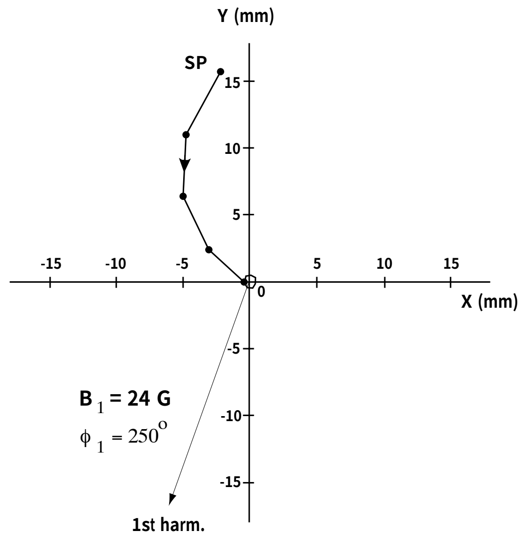


図 II-20

横方向位相楕円のマッチングとは、以下のとうりである。

入射点には、それに対応した固有楕円というものがある。そして、この入射点は valley の中心であるから、その固有楕円は直立している。そういったところに、ある値のエミッタンスをもったビームを入射するときに、たとえば図 II-21 のような（同じ面積をもった）固有楕円と異なった形で入射すると、この楕円はその後エンベロープが点線で示される楕円になるように動くことになる。つまり、実効的なエミッタンスがずっと大きなものになってしまうわけである。

したがって、そうならないように、エミッタンスの形を

固有楕円の形にあわせて入射させなさい、ということなのである。

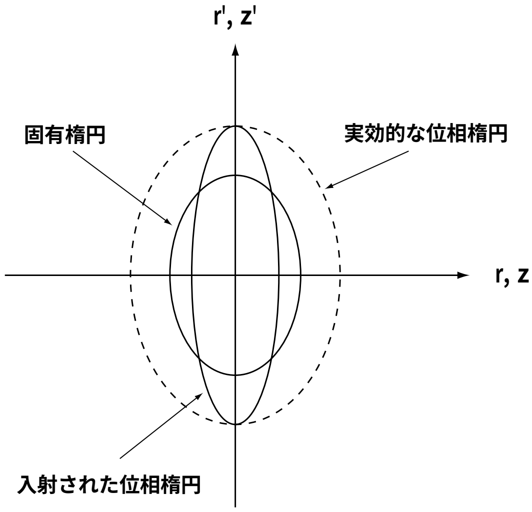


図 II-21

次に、**CP 位相マッチング**の話に移る。（詳細は、参考文献１１を参照のこと。）

CP 位相マッチングは、 x' だけ傾いた粒子は、

$$\mathcal{l} = Rx' \tag{II.11}$$

または、

$$\phi = -hx' \tag{II.12}$$

で与えられる長さ $\mathcal{l}$ またはφ だけ前後にずらして入射しなさい、ということである。つまり、図II-22 に示したように、x' が正つまり外向きのときには $\mathcal{l}$ が正つまり早めに、x' が負のときはその逆になるように入射しなさい、ということである。

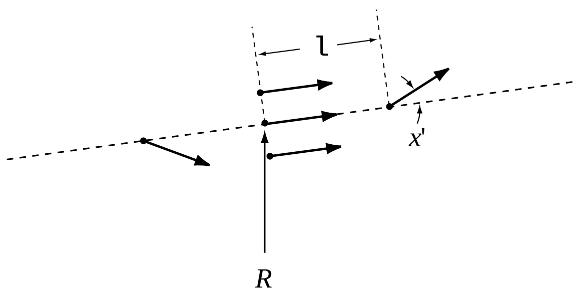


図 II-22

そして、CP 位相 ϕ_{CP} は、

$$\phi = -hx' + \phi_{cp} \tag{II.13}$$

で定義される。したがって、CP 位相マッチングをとるということは、それぞれのビームの CP 位相が皆同じになるようにそれぞれの（高周波に対する）位相を選ぶことと同じである。

説明は省くが、この CP 位相マッチングは分散マッチングをとれば自動的に行われる、ということがシンプレクティック条件を使って証明できる。

CP 位相マッチングをとったときの粒子群の運動について見てみよう。図 II-23 のように、傾いた粒子は中心粒子の前後に入射されるわけであるが、たとえば外向きに傾いた粒子はその後遠まわりをして、1/4 周した後には中心粒子と肩を並べその内側に来、また内向きに傾いた粒子は、近まわりをしてやはり中心粒子と肩を並べ今度はその外側に来る。入射点で中心粒子と肩を並べ内側にいた粒子は、遠まわりをして、1/4 周した後には中心粒子より遅れしかも傾きが内向きになり、そして内側にいた粒子は近まわりをして中心粒子より進みしかも傾きが外向きになる、といった運動をする。その後も同様な運動をするわけであるが、この運動をみると、個々の粒子が次々と役割を変えながら整然と加速されていることがわかる。整然という意味は、変な振動がなく、ということである。

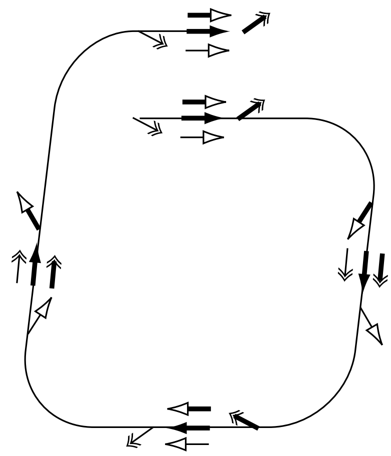


図 II-23

一般にはビームは（φ, δ）位相空間上にも広がりをもっている、つまり横方向の広がりをもった粒子群の中心粒子のそれぞれは図 II-24 のような分布をしている、CP 位相マッチングはこれらの粒子毎にとることになる。そして、そのことは分散マッチングをとれば自動的に保証される、というわけである。

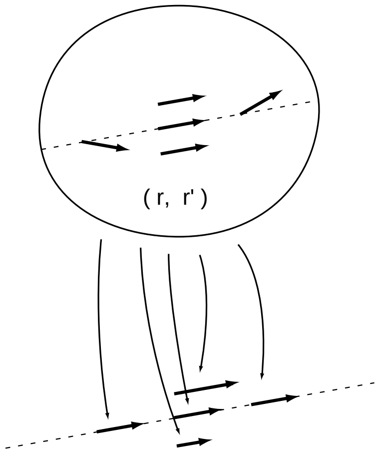


図 II-24

入射条件の最後に、**（φ , δ）位相空間でのマッチング**について見てみる。

簡単のために、入射点でのエミッタンスの形を図 II-25 のように四角形だとすると、加速は sin 波で行うので、取出しのところでは図の右側のような形になる。そこで、取出しのところでのエネルギーの広がりが最も小さくなる条件は、

$$\delta_f^{①,③} = \delta_f^{④} \qquad \text{(II.14)}$$

で与えられることがわかる。入射点での φ、δ の幅を $2\phi_0$、$2\delta_0$ とすると、(II.14) 式を満たす条件は、 RRCの場合では、

$$4\phi_0^2 = \delta_0 \qquad \text{(II.15)}$$

で与えられる。

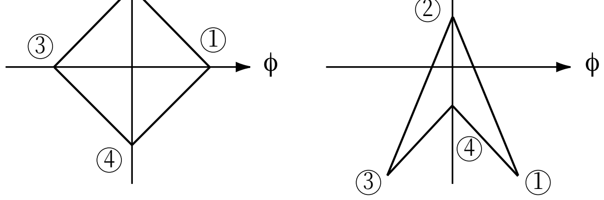


図 II-25

ではここで、以上４つの入射条件をとったりとらなかったりした場合に、ビームの振舞いがどのように変わるかということを見てみよう。

その前に、ビームのシミュレーションを行う上で非常に大切な量である**ビームの広がり**の定義について、ここでもう一度簡単にふれておく。ビームは６次元の位相空間の広がりとして一般に回転楕円体として与えられ、それは、 3 つの射影空間（r, r'），(z, z')，(φ, δ）の広がりとしてあらわされる（図 II-26）。（r, r'），(z, z')空間上では、Δr または Δz はビームに対して横方向の位置のずれであるし、Δr' またはΔz' は位置はずれてなくて傾きが有限である、いうことである。そして、（φ, δ）空間上の広がりは、ビームの進行方向つまり縦方向のビームの広がりで、Δφ は位相のずれ、Δδ は運動量のずれになる（Δ なしの φ やδ そのものでずれを表したり、また φ のかわりに l で表したりすることもある）。

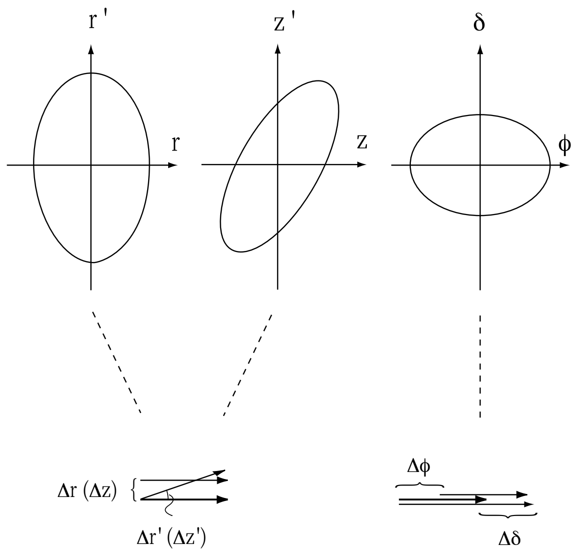
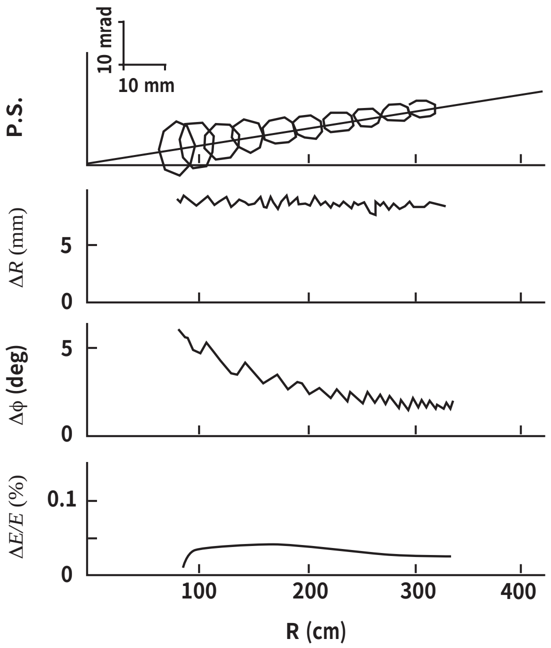


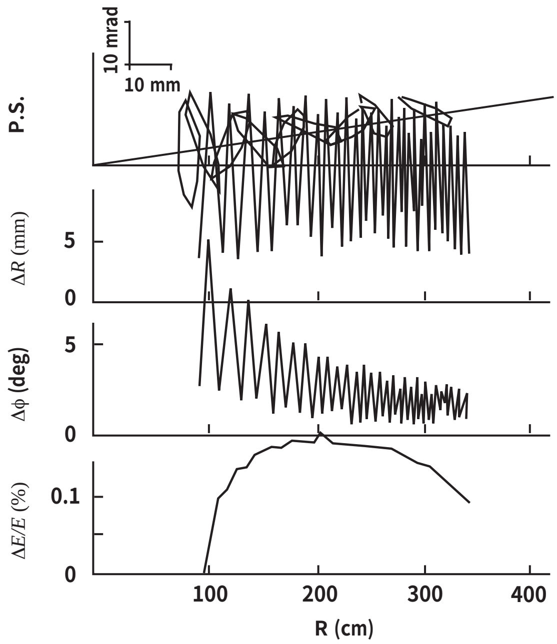
図 II-26

図 II-27 a, b, c, d にシミュレーションの結果を示す。横軸はビームの動径位置、縦軸はエミッタンスの形、ビームの幅、位相幅、エネルギー幅である。図 II-27 a は、全てのマッチングをとった場合で、ビームの広がりのパラメータはスムーズに変化している。エネルギーの幅も取出しのところで小さい値になっている。図 II-27 b は、センタリングが不良の場合で、この場合はエネルギーの幅がかなり大きい値になっている。また、ビームの幅が若干振動している。図 II-27 c は、r方向位相空間でのマッチングが悪い場合である。ビーム幅や位相幅が大きく振動し、エネルギー幅も大きな値になっている。図 II-27 d は、CP 位相のマッチングがとれていない場合で、位相幅が大きく振動している。



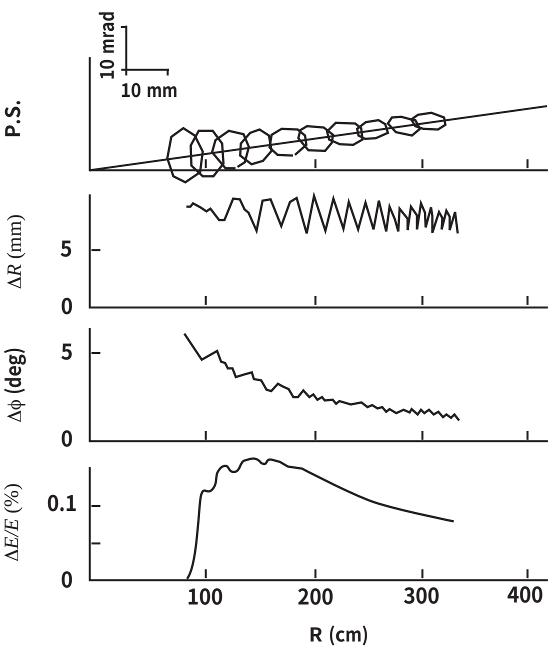
マッチング良好

図 II-27 a



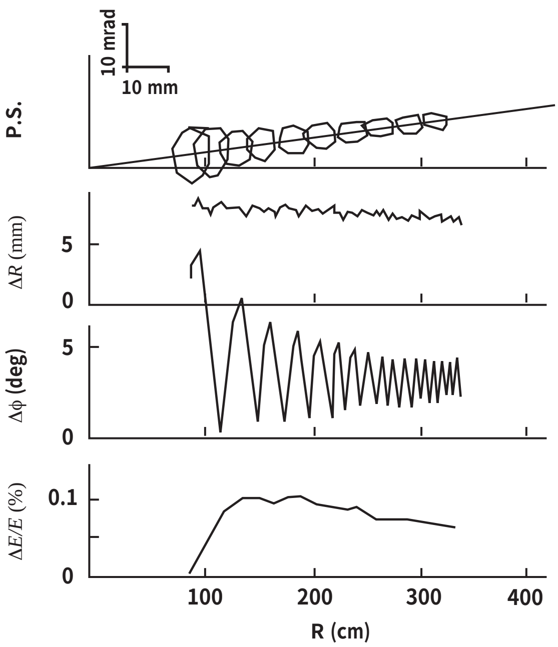
r 方向位相空間でのマッチング不良

図 II-27 c



センタリング不良

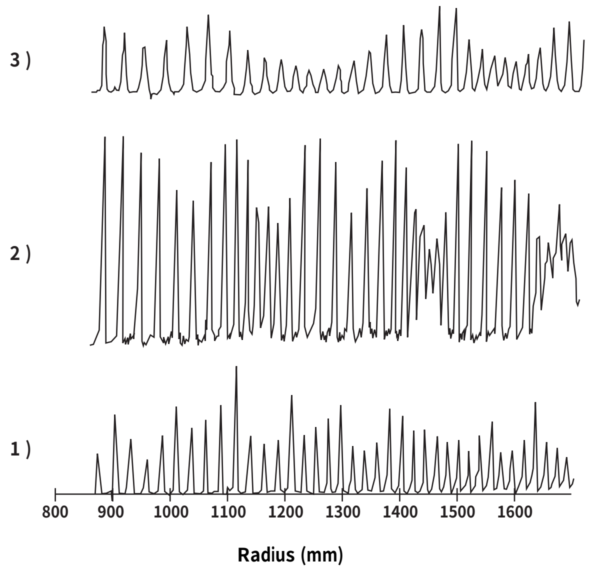
図 II-27 b



CP 位相のマッチング不良

図 II-27 d

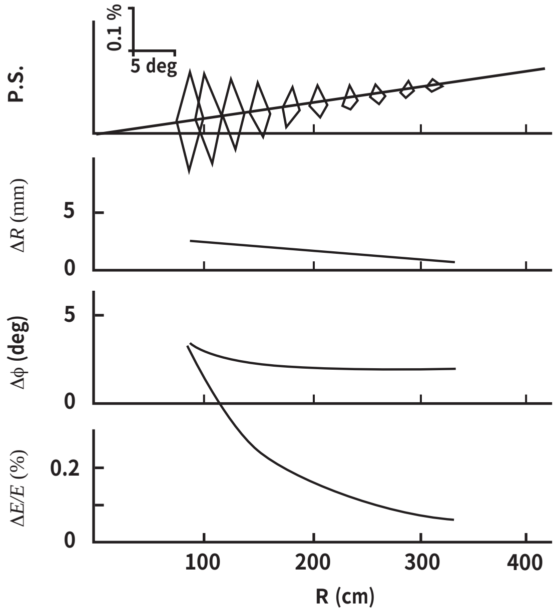
メインプローブで測った入射領域でのビームパターンの例を図 II-28 に示す。下が well-centered で、真中がセンタリングの条件が悪い場合である。well-centered の場合はターンセパレーションが単調に減少しているが、not-centered の場合はターンに疎なところと密なところがあるのがわかる。これは、中心粒子（したがって、ビーム全体）が加速平衡軌道のまわりをベータトロン振動していることを反映している。そして、上はwell-centered ではあるがエミッタンスのマッチングが悪いといった条件の場合である。ビームの幅が広くなったり狭くなったりしているのがわかる。ビームの位相楕円がベータトロン振動によって回転していることを反映している。



1）well-centered
2）not-centered
3）well-centered であるがエミッタンスのマッチングが悪い

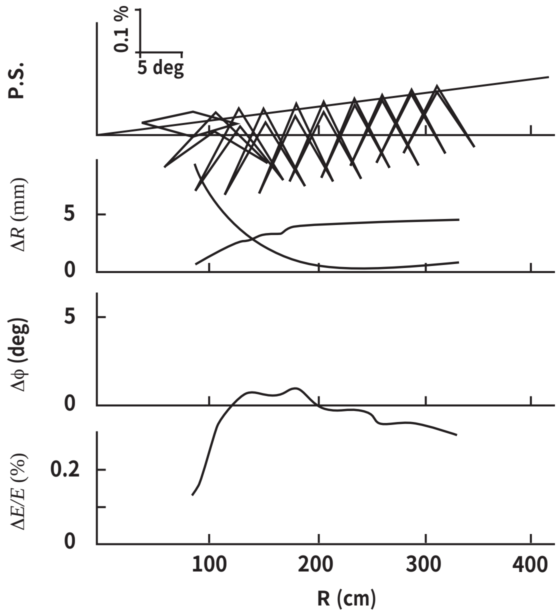
図 II-28

図 II-29 a, b は、（φ, δ）位相空間でのマッチングをとった場合ととらなかった場合の違いを示す。図 II-29 a がマッチングをとった場合で、ビーム幅、位相幅、エネルギー幅とも単調に減少して、取出しのところで小さい値になっていることがわかる（ここで、等時性サイクロトロンであるにもかかわらず位相幅が変化していることに関しては、次節を参照のこと）。それに比べて図 II-29 b のマッチングをとらなかった場合には、初期位相幅が大き過ぎるために、ビーム幅、エネルギー幅とも大きな値になっている。



マッチング良好

図 II-29 a



マッチング不良

図 II-29 b

この節の最後に、AVF の中心領域の設計に関連して行った計算について述べる。この中心領域の設計は、ビーム入射と密接に関係している。

AVF は、外部入射方式を採用している。つまり、外からやってきたイオンビームは上ヨークに開けられた穴の中を通って AVF の中心へと導かれるのである。そして、中心にはスパイラルインフレクターとよばれる静電チャンネル（ギャップ 5 mm）が置かれ、それによってイオンビームはらせん状のすべり台に沿って運動するようにしてメディアンプレーン上の加速軌道へと導かれる。

AVF の中心領域の設計では、以下の条件を満たすように、スパイラルインフレクターの大きさ、ディー電極の先端部の形状（加速ギャップ位置の調節）、ディー電圧の大きさ、磁場の中心バンプ（ビームを z 方向に収束させるためのもの）の大きさ、等を決めた。

１）加速軌道が well-centered であること
２）AVF の横方向のアクセプタンスおよび位相アクセプタンスができるだけ大きいこと
３）ビームの位相の幅が位相スリット (phase slit) で効率良く制限できること

ここで、アクセプタンスというのは、位相空間上で見てサイクロトロンが受け入れることのできる範囲の大きさのことである。

図 II-30 に、AVF の中心領域の形状を示す。85^0 の角度をもったディーが２台ある。すなわち、ビームは１周あたり４カ所の加速ギャップで加速される。ディー電極の先端を曲げることによって、加速ギャップをずらしている。図には加速軌道も一緒に示した。（完全ではないが）ほぼ well-centered になっている。

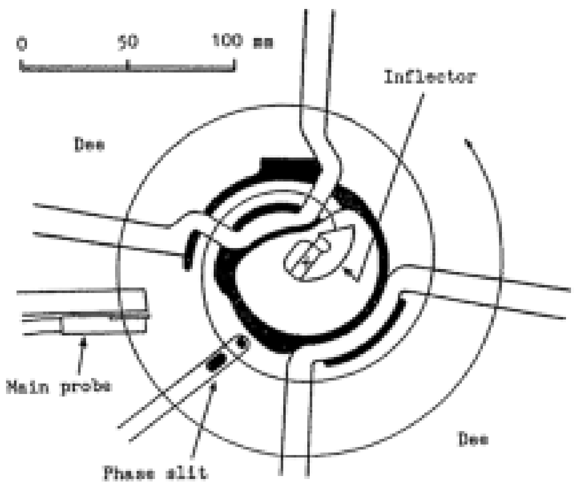


図 II-30

図 II-31 は、r、z 両方向において、それぞれ２個の粒子が行う運動の様子を最初の２周（720 度）についてプロットしたものである。この２個の粒子は、π x 2.5 mm x 40 mrad（イオン源からのビームのエミッタンスは約100 πmm.mrad、またスパイラルインフレクターのギャップは 5mm であることに注意）の位相楕円を代表する粒子である。図中の矢印と数値は、最初の４つの加速ギャップの位置と、粒子がそこを通過するときの RF 位相を示す。最初の２つは、ディー電極の先端が曲げられていることに対応していて、そのギャップのところで粒子は発散している（electric defocusing）。また、次の２つのギャップでは、RF 位相の符号が逆のため、粒子は収束している（electric focusing）。このようにして、２個の粒子のベータトロン運動の振幅が（とくに）z 方向においてバランスよく似通った値になるように調節しているのである。なお、磁場の中心バンプの大きさは、ベースの磁場の値の１% に選んだ。

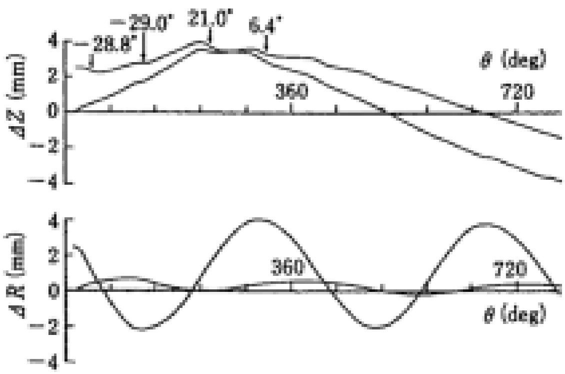


図 II-31

アクセプタンスの計算は、AVF の場合は、位相空間上でいろんな値をもった粒子をスパイラルインフレクターの出口から半径 20 cm の位置まで軌道追跡して、その間中心粒子からの距離が r 方向で±5 mm、z 方向で ±10 mm を越えなかった粒子群だけを選び出すことによって求めた。ここで、z 方向の±10 mm という値は、ディー電極の z 方向の開口が 20 mm であることから選んだ。一方、r 方向にはビームはいくら広がってもよさそうであるが、実は取出しのところであまり広がっていては取出しの効率が落ちるので、r 方向には ±5 mm という値を採用した。それらの粒子群が出発点での位相空間上で占めるエミッタンスが、すなわちアクセプタンスである。アクセプタンスは、ビームの入射位相によって異なる。図 II-32 に、そのようにして得られた AVF のアクセプタンスを示す。図から、入射位相が$\pm5^0$ 強以内であれば、アクセプタンスは 100 π mm.mrad より十分大きい、ことがわかる。また、このことから、位相アクセプタンスは約 10^0 である、ということもできる。

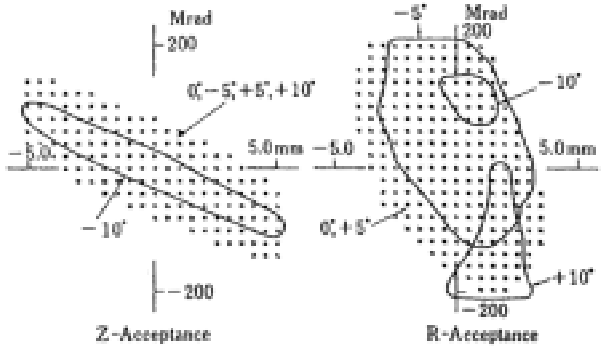


図 II-32

サイクロトロンでは、入射ビームのエネルギー幅が無視できるほど小さい場合（実際、イオン源からのビームのエネルギー幅は小さい）は、位相幅が小さいほど、取出しのところでのビームの横方向の幅やエネルギー幅は小さくなる。したがって、必要に応じて、ビームを入射した直後にその位相の幅を位相スリットとよばれるもので制限する場合がある。位相の違いによって粒子のエネルギーに差が生じ、そのエネルギーの違いが r 方向の広がりとなって現れる。その広がったところで、スリットで制限してやるのである。この広がりが大きいほど、効率よく制限できる。そしてさらに、各位相に対してもっている (r, r') 位相空間での広がりの方は逆に（スリットの位置で）収束している、というのが望ましい。図 II-33 に、入射位相が 0^o、$\pm10^o$ の粒子の軌道を示す。各位相に対して、π x 2.5 mm x 40 mrad の位相楕円を代表する２個の粒子の軌道も一緒に示している。位相スリットの位置で、入射位相の違いによって r 方向に広がり、かつ各位相に対する (r, r') 位相空間での広がりは収束している、ことがわかる。

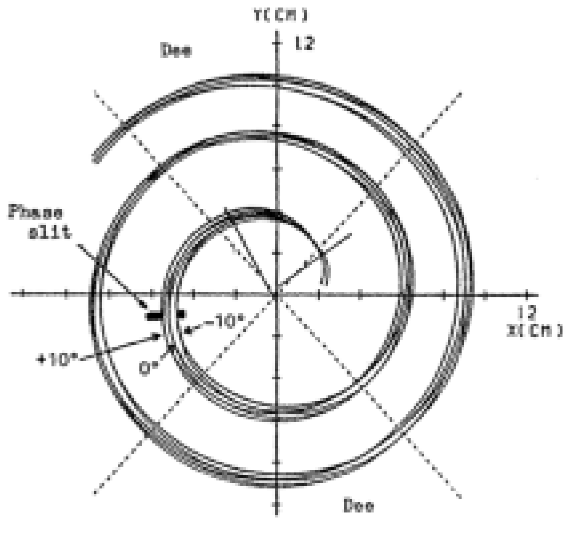


図 II-33

５. ビーム加速

次に加速である。サイクロトロンの場合は、入射をきちんと行って等時性磁場がきちんと作られていれば「後は行って来い」で、実はビーム入射の節で示したシミュレーションの結果はすでにビーム加速の結果が示されていた。したがって、加速に関してはシミュレーションという観点からはあまり面白味のあるものではない。しかし、現象として大変面白いことがあるので、それを紹介しよう。

それは、加速電場に付随する**高周波磁場**がビームに与える効果である（参考文献１２）。

動径方向に増大する加速電圧分布を与えると、図 II-34 のように高周波のトップの位相からずれた粒子に対して高周波磁場が作用を及ぼし、その効果によってビームの位相が圧縮されるのである。そのメカニズムは、以下のようになっている。

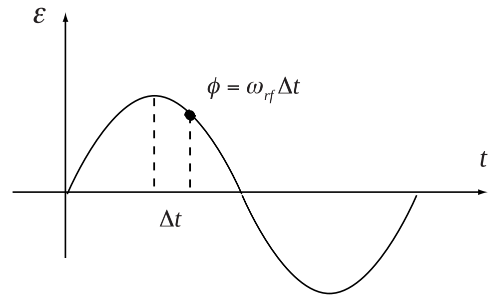


図 II-34

今、ω_{rf} で振動する RF 加速電圧の（ギャップに沿っての）分布がフラットではないとする。そうすると、Maxwell の方程式

$$\dot{b} = -rot\,\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{(II.16)}$$

を積分することによって、z 方向の高周波磁場が

$$b_z = -\frac{1}{\omega_{rf}}\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\sin\phi \qquad \text{(II.17)}$$

で与えられる。電場の動径方向の微分に比例し、また中心粒子からのずれを ϕ とすると、$\sin\phi$ に比例する。そして、この磁場は中心粒子から早く来たり遅れてきたりする粒子に対して、外向きないし内向きのキックを与えることになる。たとえば、加速電圧分布が動径方向に増大する場合には、早く来た粒子には外向き、遅れてくる粒子には内向きの力が働く。そうすると、早く来た粒子は、遠回りをするので、１回転後にはさっきより若干遅れてくることになる。つまり、中心粒子に少し近づくことになる。反対に、遅れて来た粒子は、逆に１回転後にはさっきより若干早くやってくる。つまり、やはり中心粒子に少し近づくことになる

のである。１回毎の効果は小さいものであるが、このプロセスを何回も繰り返すと、位相の幅が短縮されるということになるわけである。

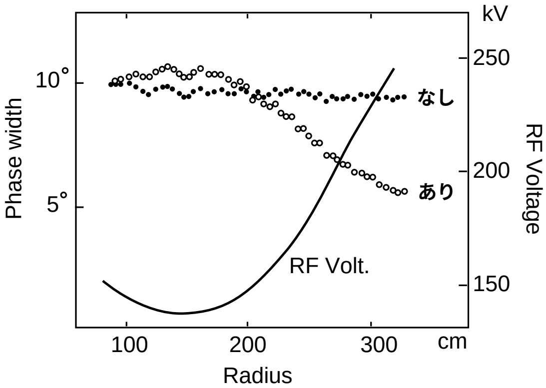
ハミルトニアンを書き下して、式を変形していくと、

$$V(R)\sin\phi(R) = \text{一定} \tag{II.18}$$

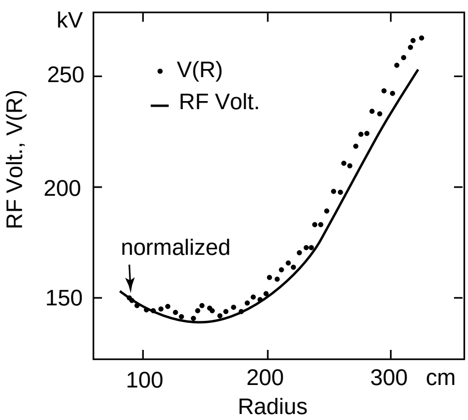
というきれいな関係が得られる。これから、取出し点での加速電圧 V_{ext} と入射点での加速電圧 V_{inj} の関係が与えられれば、ビームの位相幅が圧縮される割合が求められる。

RRCの場合について、この効果のシミュレーションを行った。図II-35は、ある周波数のときの加速電圧の分布に対して、黒丸は高周波磁場を考慮しない場合、そして白丸が考慮した場合のビーム位相幅の計算の結果である。位相幅が、最初10°であったものが、5°近くまで短縮されていることがわかる。

図II-36は、このシミュレーションの結果、(II.18)式の関係が良く成り立っている、ことを示した図である。



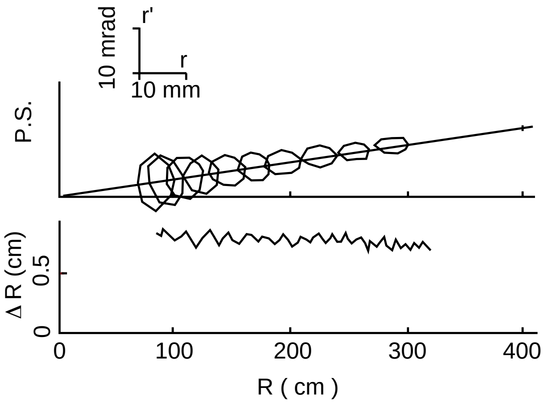
図II-35



図II-36

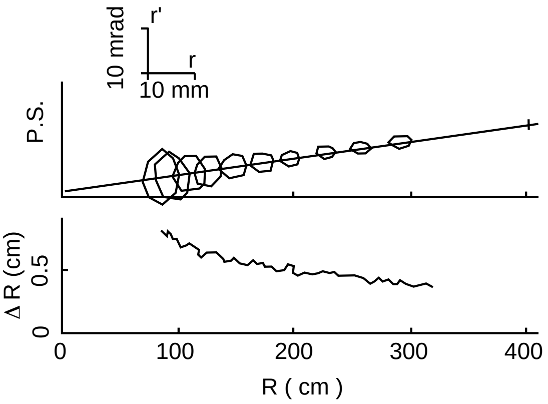
一般に、サイクロトロンでは、空間電荷効果が問題にならない限りでは、位相幅ができるだけ小さいほうがいい。したがって、RRCでは、電圧分布が半径とともに増大するようにRF共振器を設計した。

図II-37 a, b は、高周波磁場がr方向の位相楕円に与える効果について計算したものである。図II-37 aが高周波磁場を考慮した場合で、図II-37 bが高周波磁場を考慮しない場合である。高周波磁場を考慮しない場合、エミッタンスもビームの幅も、考慮した場合に比べてよりshrinkしている、ことがわかる。



高周波磁場あり

図II-37 a



高周波磁場なし

図II-37 b

このように加速電圧が動径方向に一様でない分布をもつ場合は、シミュレーションする際に高周波磁場をとりいれないと間違った結果を得ることになる、ということがわかる。従って、計算プログラムを作るときには、このことに注意しなければならない。

６. ビーム取出し

サイクロトロンからのビームの取出しでは、シングルターン取出しが重要な問題となる。取出しの位置での最後の２ターンがきれいに分離していれば、静電デフレクターでのビームの損失も最小限に押さえられるし、また取り出されたビームも非常にいい性質のものが得られる。

ここでは、取出しのところでのターンの分離をよくするための方法について見てみよう。

一般に、加速粒子の動径位置 r(θ) は、

$$r(\theta) = r_0(\theta) + x_0 \sin(\nu_r + \theta_0) \qquad \text{(II.19)}$$

のように２つの項の和で表される（参考文献１３、１４）。第１項の $r_0(\theta)$ は加速平行軌道の位置を、第２項は加速平衡軌道のまわりの振動を表す。この第２項は、軌道中心の振動に対応している。そうすると、ある点 θ_i での値は、

$$r(\theta_i) = r_0(\theta_i) + x_0 \sin\{2\pi n(\nu_r - 1) + \theta_0\} \qquad \text{(II.20)}$$

となる。ここで、ν_r を $\nu_r - 1$で置き換えた。これは、軌道中心の運動に焼き直すための操作である。

ターンセパレーションは、(II.20) 式の差分をとって、

$$\begin{aligned}\Delta r(\theta_i) &= \Delta r_0(\theta_i) \\ &\quad + \Delta x_0 \sin\{2\pi n(\nu_r - 1) + \theta_0\} \\ &\quad + 2\pi(\nu_r - 1)x_0 \cos\{2\pi n(\nu_r - 1) + \theta_0\} \qquad \text{(II.21)}\end{aligned}$$

で与えられる。第１項は、加速によって得られるものである。第２項は、１次ハーモニックフィールドの動径方向の磁場勾配によって得られるもの（図 II-38）で、これを利用した取出しのことを regenetative extraction とよぶ。第３項は、軌道中心の回転を利用したもの（図 II-39）で、これを利用した取出しのことを precessional extraction とよぶ。サイクロトロンの取出しでは、できるだけターンセパレーションが大きくなるようにこれらを利用している。

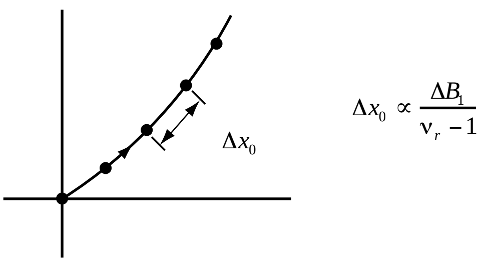


図 II-38

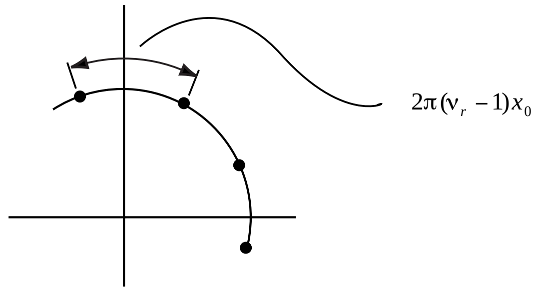


図 II-39

図 II-40 は、リングサイクロトロンにおいて **regenetative extraction 法**を使ったときの軌道中心の運動をシミュレートした図である。静電デフレクター（EDC）とは反対の方向に、動径方向に磁場勾配をもった１次ハーモニック磁場をかけると軌道中心が約５mm のステップで、デフレクターの方向に動く。したがって、デフレクターの入口のところで、単に加速によって得られるターンセパレーションよりもさらに約５mm 広いターンセパレーションが得られることになる、わけである。図 II-41 は、同じ条件の場合に、位相空間上のエミッタンスの動きについてプロットした図である。EDC の位置でターンセパレーションが十分広がっていることがわかる。

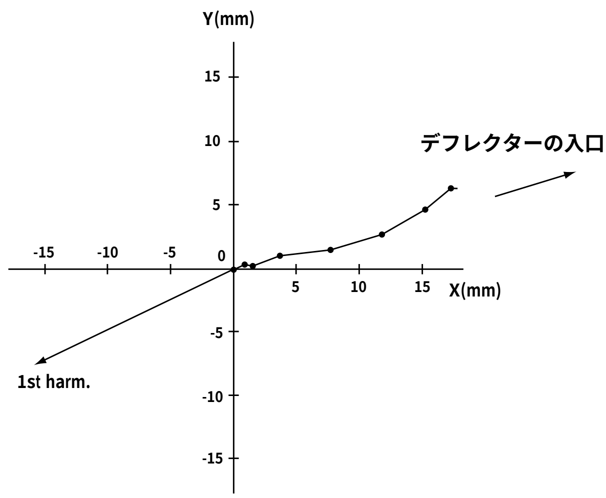


図 II-40

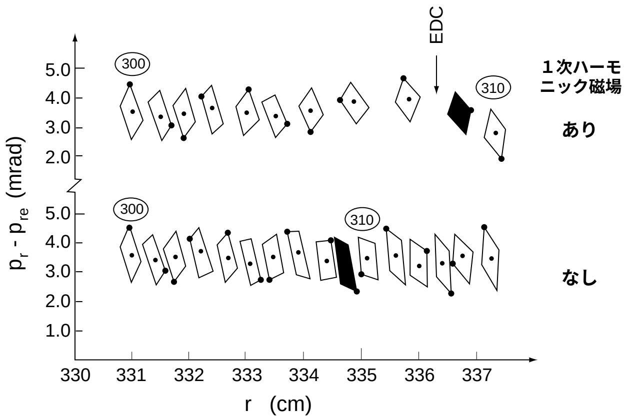
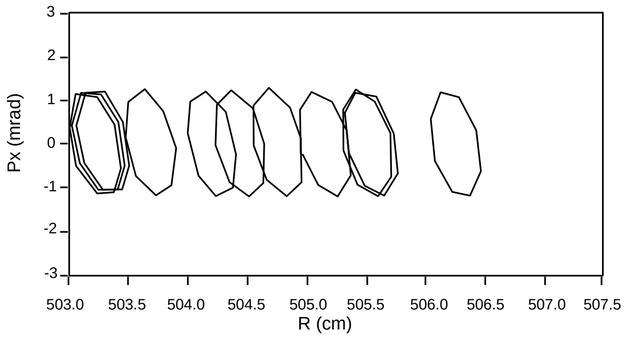


図 II-41

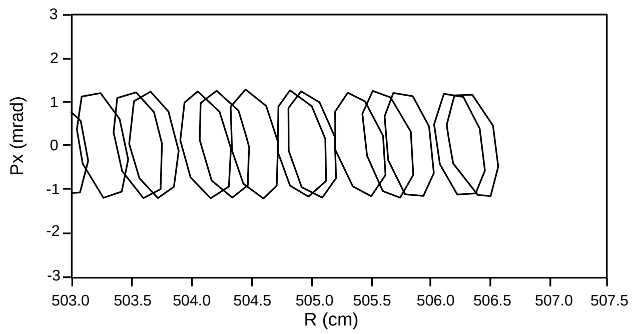


Off-centered

図 II-42 b

次に、(II.21) 式の第３項、つまり **precessional extraction 法**を用いたビームの取出しのシミュレーションの結果を、図 II-42 a, b に示す。これは、**オフセンタリング（off-centering）法**ともよぶ。オフセンタリングは、入射点でわざとセンタリングをとらないようにビームを入射して行う。ほぼ well-centered になっている場合では取出しのところでターンが重なっているが、オフセンタリングで加速平衡軌道のまわりにベータトロン振動をおこさせると、取出しの位置で最後の２つのビームが分離していることがわかる。これは、SRC に関するシミュレーションの結果である。図 II-28 b に示したビームパターンは RRC でのオフセンタリング入射の例であったが、それを見てもわかるようにターンが疎なところで大きなターンセパレーションが得られるのである。

もう一つ、１次ハモニック磁場と $\nu_r = 1$ の共鳴を同時に利用したビームの取出しについて述べる。この場合には、非常に大きなターンセパレーションが得られる。この方法では、図 II-43 a, b のように、先ず取出しの少し前で１次ハーモニック磁場をかけて磁場中心を機械中心から、ある適当なところまでずらす。そうすると、初め機械中心にあった軌道中心は、その磁場中心の移動に沿ってじわじわと移動する（磁場の立ち上がりが階段関数的でないから）。そこで、$\nu_r = 1$ の共鳴を通過させると、（(II.10) 式において、ν の符号が変わるため）M の位置が機械中心に対して点対称の M' の位置にジャンプする。そして、その後、軌道中心が M' のまわりを回転しはじめる。こういうふうにして、大きなターンセパレーションが得られる、という算段である。



Centered

図 II-42 a

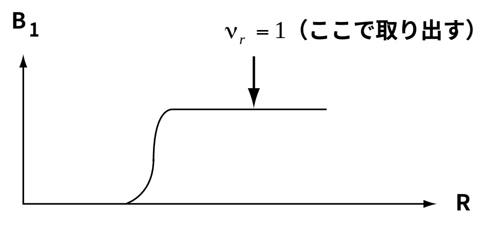


図 II-43 a

図 II-45 は、（φ, δ）位相空間上と（r, r'）位相空間上でのビームの振舞いを示す。上段が入射点、中段が 50 ターン目、下段が取出し点での形である。

先ず、δ、r' とも、その大きさがビームの加速とともに減少していることがわかる。これは、これらの値が $\delta = \Delta p/p$、$r' = p_r/p$ で定義される量であるから当然のことである。次に、確かに位相幅が加速中ほぼ一定になっていることがわかる。また、ビームが加速された後の (φ,δ) 位相空間での形が上に凸のいわゆるバナナ形をしているのは、加速高周波の sin 波の形を反映しているのである。

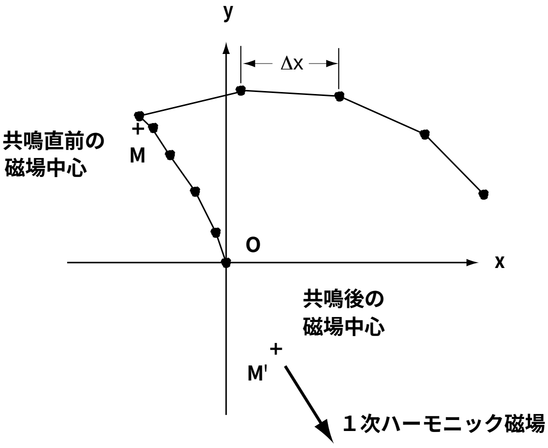


図 II-43 b

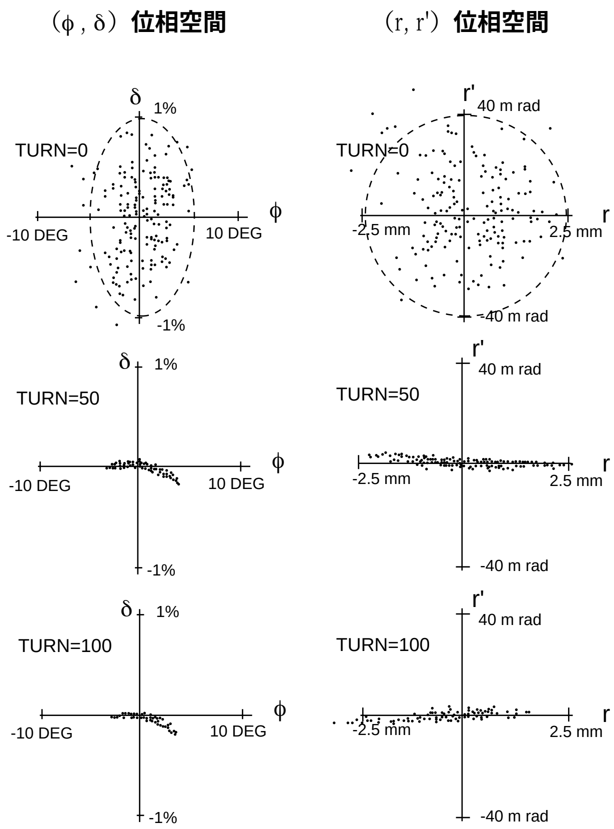


図 II-45

7. モンテカルロシミュレーション

最後に、AVF で個数 200 ヶ程度の粒子集団に対して、入射点から取出し点までビームトラッキングを行った例を紹介する。ここでモンテカルロシミュレーションといっているのは、粒子集団の位相空間での初期値を選ぶのに乱数を使った、ということである。ビームサイズを考慮しながら、多数個の粒子に対して６次元位相空間上で初期パラメータをランダムに選ぶ（図 II-44）ことによって、計算結果がより現実に近くなる。

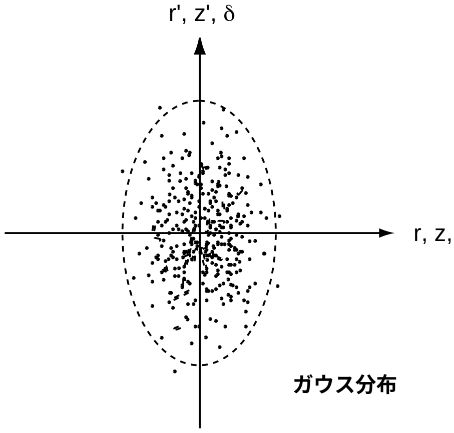


図 II-44

図 II-46 は、メインプロームでビームを測ったらどんな形になるか、ということをシミュレートした図である。上の部分が加速高周波の初期位相が $-27°$ のときで、下の部分が初期位相が -17^{o} のときの形である。初期位相が 10^{o} 変わるとパターンががらっと変わることがわかる。この例では 10^{o} 違った場合の変化を見たが、実際には数度違っただけでビームパターンの変化が見られる。とくに、RRC では 1^{o} ～ 2^{o} の違いが問題になるほどである。

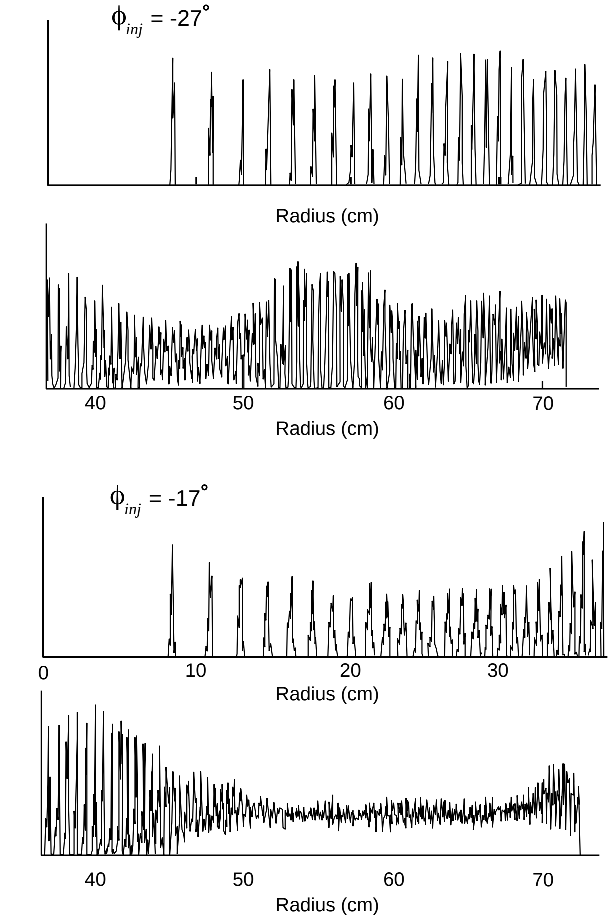


図 II-46

謝辞

応用編（実践編）で紹介した理研リングサイクロトロンに関するビーム解析は、すべて理研の矢野安重氏と一緒に行ったものです。氏との議論を通じて、筆者なりにビーム解析に対する理解を深めてきました。氏には多くのことを教わりました。この場をかりて、感謝申し上げます。

この講義ノートの原稿を作成するにあたっては、多くの方々にお世話になりました。とくに、坂田芳子、密本俊典、坂本成彦、加瀬昌之、上垣外修一の各氏には図の作成等を手伝っていただきました。ここに、お礼申し上げます。

なお、基礎編の説明では巻末の参考文献を参考にさせていただいたことを申し添え、感謝の意を表します。

参考文献

１）J. R. Richardson, "Sector Focusing Cyclotrons", Progress in Nuclear Techniques and Instrumentation, North-Holland Publishing Com., Amsterdam, 1965.

２）熊谷寛夫他　「実験物理学講座２８　加速器」§III-11　共立出版

３）L. H. Thomas, "The Paths of Ions in the Cyclotron", Phys. Rev. 54, 580 (1938).

４）M. K. Craddock, "High-intensity Circular Proton Accelerators", High-Brightness Accelerators, Plenum Press, New York and London, 1988.

５）L. Smith and A. A. Garren, "Orbit Dynamics in the Spiral-Ridged Cyclotrons", UCRL-8598, 1959.

６）M. M. Gordon, "Orbit Properties of the Isochronous Cyclotron Ring with Radial Sectors", Annals of Physics 50, 571 (1968).

７）K. L. Brown et al., "TRANSPORT: A Computer Program for Designing Charged Particle Beam Transport System", SLAC-91, Rev. 1, 1974

８）W. Joho, "Space Charge Effects in Cyclotrons", Int. Accelerator School, Dubna, USSR, 1988.

９）W. Joho, "Tolerances for the SIN Ring-Cyclotron", SIN Report TM-11-4, 1968.

１０）小出昭一郎 「物理入門コース２ 解析力学」 第１章 岩波書店

１１）W. M. Schulte, "The Theory of Accelerated Particles in AVF Cyclotrons", Thesis, Technical University, Eindhoven, 1978.

１２）W. Joho, "Application of the Phase Compression - Phase Expansion Effect for Isochronous Storage Rings", Particle Accelerators 6, 41 (1974).

１３）J. M. van Nieuwland, "Extraction of Particles from a Compact Isochronous Cyclotron", Thesis, Technical University, Eindhoven, 1972.

１４）W. Joho, "Extraction of a 590 MeV Proton Beam from the SIN Ring Cyclotron", SIN Report TM-11-8, Thesis, 1970.

Appendix　斜め入射による収束（edge focusing）

図 A-1 のように、速度 v の粒子が角度 α をもってエッジを横切る場合を考える。そうすると、z 方向の粒子の運動方程式は、

$$m\ddot{z} + q\upsilon B_h \sin\alpha = 0 \tag{A.1}$$

で与えられる。ここで、B_h は磁場の水平成分のエッジに垂直な方向の値である。B_h はエッジの付近で有限な値をもつ。今、s = vt なるパラメータを導入すると、z 方向の運動量 p_z の変化を与える式は、（A-1）式より、

$$\frac{dp_z}{ds} = -qB_h \sin\alpha \tag{A.2}$$

となる。

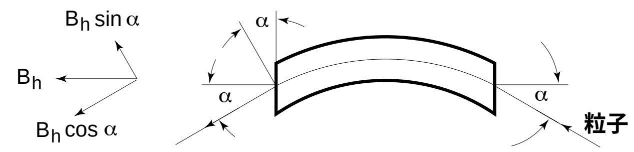


図 A-1

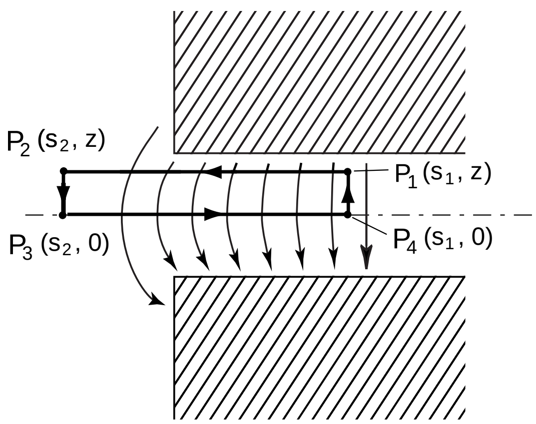


図 A-2

エッジを横切るときの z方向の運動量の総変化量ΔP_Z は、図 A-2 で定義されるパラメータを用いて、

$$\begin{aligned}\Delta p_z &= \int_{s_1}^{s_2} dp_z \\ &= -q\sin\alpha \int_{s_1}^{s_2} B_h ds \\ &= -q\tan\alpha \int_{s_1}^{s_2} B_h \cos\alpha ds\end{aligned} \tag{A.3}$$

で与えられる。一方、ストークスの定理より、P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_1 に沿っての閉積分は、

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int \nabla\times\vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (\Leftarrow \nabla\times\vec{B} = 0) \tag{A.4}$$

となる。P_2 - P_3 に沿っての積分とP_3 - P_4 に沿っての積分は、それぞれ、磁場の値が 0 であることと磁場と積分経路が直交していることのため、どちらも 0 となる。したがって、

$$\int_{P_1}^{P_2} B_h \cos\alpha ds = -B_0 z \tag{A.5}$$

となり、結局、

$$\Delta p_z = -qB_0 z\tan\alpha \tag{A.6}$$

となる。この式より、α が正のとき（図 A-1 の場合）粒子は収束作用を受けることがわかる（逆に α が負のときは発散作用を受ける）。

したがって、焦点距離 f は、

$$\frac{1}{f} = -\frac{\Delta p_z}{p}\frac{1}{z} = \frac{qB_0}{m\upsilon}\tan\alpha \tag{A.7}$$

で与えられることになる。