

THEORETICAL STUDY ON THE STABILITY OF COULOMB CRYSTALLIZED BEAMS IN PRERIODIC FOCUSING CHANNELS

Kei Fukushima^{*A)}, Hiromi Okamoto^{A)}, Hiroshi Sugimoto^{B)},

^{A)}Graduate School of Advanced Sciences of Matter, Hiroshima University

1-3-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 739-8530, Japan

^{B)}High Energy Accelerator Research Organization

1-1 Oho, Tsukuba 305-0801, Japan

Abstract

The stability of ultralow-emittance coasting beams in periodic focusing lattices is studied by employing the molecular dynamics (MD) simulation technique and linearized Vlasov theory. Assuming sinusoidally varying linear focusing fields, we figure out the parameter range where a stable multi-shell coulomb crystalline state can be reached with the ideal beam cooling force. A number of systematic MD simulations show that the stability region is considerably diminished as the degree of lattice symmetry breakdown due to error fields increases. We compare the MD results with Vlasov predictions, confirming that the stability threshold is determined by a second-order coherent resonance stop band.

超低エミッタンス極限ビームの安定性に関する理論的研究

1. はじめに

保存場中の荷電粒子ビームが6次元位相空間上で占有する体積(エミッタンス)は、個別粒子間のクーロン衝突を無視する近似で不変量となる。したがって、エミッタンスを縮減するには何らかの人為的散逸力(ビーム冷却力)を導入する必要がある。理想的な散逸力により極限まで低エミッタンス化されたビームではランダムな熱的運動が消失し、いわゆる“クーロン結晶”状態となることが知られている。クーロン結晶化した“クリスタルビーム”のエミッタンスはほぼゼロであり、原理的に到達可能な最高の質をもつビームである。広島大学ビーム物理グループは、小型の非中性プラズマトラップを応用した、きわめてユニークなビームダイナミクスの実験的基礎研究を展開している^[1]。クリスタルビームの実現に向けたトラップ実験も計画されており、現在、必要な実験システムを構築中である。以下では、実験に先立って行った超低エミッタンス極限ビームの安定性に関する多粒子シミュレーションと理論計算の結果について大まかに報告する。

本研究で考察するのは超低エミッタンス領域における横方向ビーム運動の安定性である。したがって、いずれの計算においても、軸方向に一樣な連続ビーム(あるいは無限に長い非中性プラズマ)が想定されている。また、簡単のため、水平方向のベータatronチューン ν_x と鉛直方向のベータatronチューン ν_y はほぼ等しいとした($\nu_x = \nu_y \equiv \nu_0$)。

2. 理論的背景

2.1 プラズマ結合定数

通常の荷電粒子ビームはきわめて高温・希薄であり、或る種の“気体相”にあると考えることができる。強力なビーム冷却力によって温度が低下すると、粒子密度が上昇してイントラビーム散乱(IBS)による加熱効果が

顕著になる。加速器のラティス構造が一定の条件を満たしている場合、IBS加熱率は低温領域で一度ピークを迎え、さらに冷却していくと減少に転じる。散乱加熱が最大となるあたりでビームは“液体相”となっており、絶対零度近傍で最終的に“固体相”、つまりクーロン結晶状態に至る。クーロン結晶状態ではランダムな個別粒子散乱がほぼ抑制されているため、IBS加熱率はゼロに近い。このような多粒子系の相転移現象はクーロン結合定数 Γ によって特徴づけることができる。これはクーロンエネルギーと運動エネルギーの比で次のように定義される^[2]。

$$\Gamma \equiv \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d k_B T} \quad (1)$$

q は粒子1個(質量 M)の電荷、 k_B はボルツマン定数、 $2d$ は平均粒子間距離である。上述した通り、ここでは横方向のビーム運動を考察の対象としているので、温度 T は以下の式を使って評価する：

$$k_B T \equiv \frac{p_0^2}{8M} \left(\frac{\epsilon}{a}\right)^2 \quad (2)$$

ここで、 p_0 は設計運動量、 ϵ は横方向の二乗平均エミッタンス、 a は二乗平均ビームサイズ($a = 2\sqrt{\langle x^2 \rangle}$)である。式(1),(2)から、横方向のプラズマ結合定数は

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d k_B T} \\ &= 8r_p \left(\frac{4N}{3a^2}\right)^{1/3} \left(\frac{a}{\epsilon}\right)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる^[3]。ここで、 r_p は粒子の古典半径、 N はプラズマの線密度である。

通常の気体状態のビームでは $\Gamma \ll 1$ が成立し、液体相では $\Gamma \approx 1$ 、クーロン結晶状態では $\Gamma > 170$ となることが知られている。したがって、結合定数を求めることにより、ビーム状態を判定できる。

* m115856@hiroshima-u.ac.jp

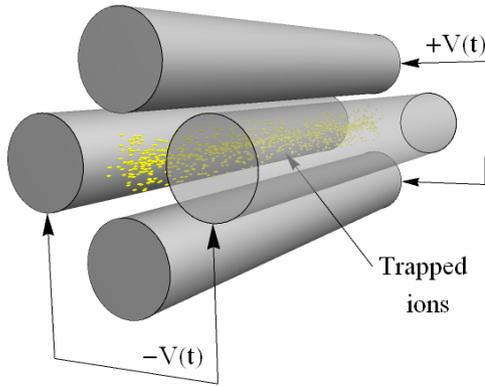


図 1: 線形ポールトラップの模式図

2.2 集団共鳴不安定性

クーロン相互作用の到達距離は非常に長いため、粒子密度が高い場合、ビームを構成する個々の粒子は独立に振る舞うことはできない。各粒子の運動はクーロン場を介して結合し、ビーム全体が集団的に運動するようになる。この集団運動は振動数の異なる無数の振動モードの重ね合わせとして表現でき、特定の振動モードが周期的な外部駆動力と共鳴すると、そのモードは不安定となる。1次元のプラソフ理論によると、 m 次の振動モードが共鳴によって不安定化する条件は以下の式で与えられる^[4]：

$$m(\nu_0 - C_m \Delta\nu) \simeq N_{sp} \cdot \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

ここで、 $\Delta\nu$ はクーロン斥力によるチューンシフト、 $C_m (< 1)$ はモード次数に依存する定数、 N_{sp} は蓄積リングのラティスの対称性（超周期数）である。ビームが極低温に近づく、チューンシフトは極めて大きくなり、蓄積リングの実効的動作点は様々な集団共鳴線を横切ることになる。最も深刻な問題を引き起こすのは最低次の線形共鳴 ($m = 2$) であり、冷却の全過程を通じて、これを回避する必要がある。初期の高温状態において $\Delta\nu = 0$ であることを考えると、クーロン結晶状態に至るまで線形共鳴を横断しないための条件は $\nu_0 < N_{sp}/4$ であることが分かる。一方、低温極限においてクーロン結晶の安定性を保証する条件として、

$$\nu_0 < \frac{N_{sp}}{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

が知られている^[5]。これはクリスタルビームの維持条件と呼ばれるもので、同様に 2 次の線形モードの安定性に関連している。

2.3 非中性プラズマトラップ実験

当グループで現在準備中の実験には、いわゆる線形ポールトラップ（以下 LPT と略記）を用いる。図 1 は LPT の基本構造を模式的に表したものである。4 本のロッド電極に適切な位相で高周波電圧を印可し、四重極電場を構成する。これにより軸に直交する平面内でのプラズマ集束が実現され、大量の荷電粒子を電極に囲まれ

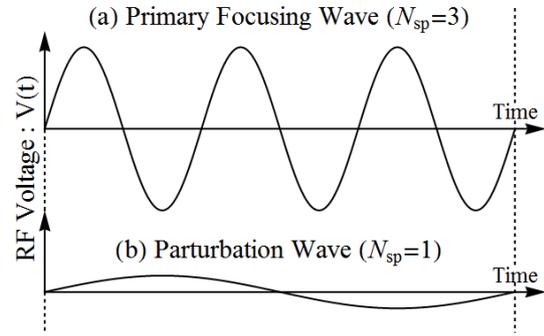


図 2: (a) プラズマ閉じ込めのための高周波電圧。(b) ラティス対称性の破れを再現する摂動電圧。

た狭い空間に閉じ込めることができる。軸方向の集束は電的に独立した別の電極に直流電圧を印可することにより達成できる。この種の LPT に蓄積された非中性プラズマの集団運動は重心系で観測した荷電粒子ビームの集団運動と物理的に等価であることが証明できる^[6]。したがって、巨大で複雑な加速器に頼らずとも、小型で安価な LPT を用いてビームの基礎物性に関する有益な情報を得ることができる。

前章で概説した集団共鳴現象を LPT 中で再現するには、蓄積リングのラティス構造と同形の矩形高周波電圧をロッド電極に印可すればよい。しかしながら実験手順を簡略化するため、当面は取り扱いが容易な正弦波電圧が使用される予定である。特定の共鳴に寄与するのは、周期的外力が含む特定のフーリエ・ハーモニクスであるため、周波数の異なる少数の正弦波電圧を重畳することにより、現実のラティスに起こり得る基本的な共鳴不安定性をすべて再現できる。図 2 はロッドに印可する正弦波電圧の一例である。図 2(a) は 3 組の FODO セルに対応する。蓄積リングが 3 回対称性を有しており、それぞれの基本ラティス周期が単一の FODO セルを含む場合、(a) はビームがリングを一周する間に受ける集束力とみなすことができる。実際の加速器は有限の磁場誤差を含むため厳密な意味でのラティス超周期数は常に 1 である。この状況を LPT で再現するには、図 2(b) のような長周期の摂動正弦波を重畳すればよい。摂動の振幅は磁場誤差の大きさに対応するので、ラティス対称性の破れの大きさと発生する共鳴の強さの関係を定量的に評価することができる。

3. 計算結果

3.1 分子動力学シミュレーション

LPT 中でのプラズマの冷却過程について系統的に調べるため、当グループで開発された分子動力学シミュレーションコード MDTRAP を使用した。軸方向に一樣なプラズマを仮定し、周期境界条件を課すことにより、計算時間を大幅に短縮している。実際のトラップ実験で用いられる一価のカルシウムイオンプラズマを想定し、これに 3 方向から強力な散逸力を加えてクーロン結晶状態に到達するかどうかを調べた。ラティス超周期

数 N_{sp} の異なるリングをいくつか考慮し、それぞれのケースにおいて、摂動正弦波の振幅とチューン ν_0 の値を変化させ、多数の系統的シミュレーションを行った。この際、クーロン結合定数が最終状態で $\Gamma > 170$ を満たしているか確認し、プラズマの状態を判定した。尚、プラズマの線密度は全領域において殻状クーロン結晶が生成されると予想される値を用いている [7]。

最終的に到達したクーロン結合定数の値を、チューンおよび摂動電圧振幅の関数としてプロットしたのが図3である(横軸は摂動正弦波と集束正弦波の振幅比をとっている)。色の薄い部分が $\Gamma \geq 170$ となりプラズマがクーロン結晶化した領域である。 $N_{sp} = 2, 3, 6$ 、いずれのケースにおいても、ラティス対称性の破れが全くない場合(摂動電圧比0%)は $\nu_0/N_{sp} < 0.35$ の領域で安定なクーロン結晶が生成されている。これは先に触れたクリスタルビームの維持条件、 $\nu_0/N_{sp} = 0.35 (\approx 1/2\sqrt{2})$ の妥当性を裏付けている。一方、誤差によるラティス対称性の破れが大きくなるにつれて、クーロン結晶化可能なチューンの閾値は低下している。摂動正弦波と集束正弦波の振幅比が1%に達した時点で、どの超周期数においても $\nu_0 \approx 0.4$ 付近が境界となっていることが分かる。摂動電場を加えたことにより、厳密な意味での超周期数はいずれの場合も1 ($N_{sp} = 1$) になっていると考え、クリスタルビームの維持条件から、チューンの閾値は $\nu_0 = 1/2\sqrt{2} \approx 0.35$ となるべきである。しかしながらシミュレーションで得られた閾値は、摂動電場の大きさが $\sim 1\%$ の範囲では、0.35を有意に超えている。

3.2 線形ブラソフ解析

2次元のブラソフ・ポアソン方程式系を文献 [8] に与えられている手法をもちいて摂動解析し、共鳴不安定領域のパラメータ依存性を評価した。外場としては先の図2のような複数の正弦波が重畳されたものを仮定し、一様定常分布の安定性を調べた結果が図4である。色のついている部分及び、白抜きの部分が2次の線形共鳴の不安定領域を示しており、横軸は設計チューン ν_0 、縦軸はチューン降下率 η (空間電荷効果によりシフトした実効チューン $\nu_0 - \Delta\nu$ と ν_0 の比)で、低温極限では $\eta \rightarrow 0$ となる。摂動正弦波と集束正弦波の振幅比は1%で固定している。

図の白抜きの部分の左端は半整数共鳴線 ($\nu_0 = 0.5$) に対応しているが、より低いチューンに細い不安定領域が確認でき、この2次共鳴線がクーロン結晶生成の閾値を決定していると考えられる。実際に $\eta = 0$ における共鳴線は図3の閾値とほぼ一致している。摂動正弦波の振幅比をさらに大きくすると、共鳴線の幅が増大し、最終的には全てのケースで結晶化の閾値を $\nu_0 = 0.35$ まで押し下げると予想される。逆に、ラティス対称性の破れが十分小さければ、リング一周のチューン ν_0 の上限は $1/2\sqrt{2}$ と $N_{sp}/2\sqrt{2}$ の間にあると言える。尚、理論上、高次の非線形共鳴は図4に示した線形共鳴よりも低いチューンで発生しうが、シミュレーションではその影響は確認されなかった。

4. まとめ

広島大学で計画されている、LPTを使った超低エミッタンスビームの基礎物性実験を念頭に、強力な散逸力

にさらされた非中性プラズマのクーロン結晶化条件を理論的に調べた。外部集束力、ならびに対称性の破れの大きさを変化させ系統的な分子動力学シミュレーションを実行し、クーロン結晶が生成可能なパラメータ領域を特定した。ブラソフ方程式に基づく不安定領域の数値解析も併せて行い、シミュレーションのデータと比較検討した。その結果、基本的には“クリスタルビームの維持条件”が妥当なものであることを確認した。すなわち、単一ラティス周期構造あたりのチューンは $1/2\sqrt{2}$ 以下でなければならない。現実には、いかなる蓄積リングも有限の誤差磁場を含んでおり、厳密なラティス超周期数は1である。この場合、誤差による対称性の破れの大きさに応じて、ビームの超低エミッタンス化が可能なチューンの上限値は減少する。線形 ($m = 2$) の集団共鳴不安定性が閾値低下の原因であり、線形ブラソフ解析によれば、クーロン結晶の安定領域を規定する線形共鳴のストップバンドは誤差場の増大に伴って拡張する。元々 N_{sp} 回の対称性を持っていた蓄積リングに強い磁場誤差が生じた場合、(単一ラティス周期構造当たりではなく)リング一周あたりのチューンを $1/2\sqrt{2}$ 以下に抑えない限り、超低エミッタンスビームは実現できない。

尚、本研究ではきわめて強い3次元冷却力を仮定してシミュレーションを行っている。実際のビーム冷却実験において、同等の3次元的な散逸力を用意することができるかどうかは十分に検証していないが、原理的に到達可能な限界温度の観点から、今のところ“レーザー冷却法” [9][10] が唯一の解であると考えてよい。ただし、レーザー散逸力の効率的な3次元化には特別な工夫が要求される [11]。各自由度の散逸力が不十分だった場合、共鳴の影響がより深刻化し、クーロン結晶の安定領域が狭まってしまう可能性がある。そもそも上で触れたように、液体相に至るまでIBS加熱率は増大を続けるので、少なくともそのピーク値を超える冷却効率の実現が必須である。そうでなければ、最終的な平衡温度はビーム冷却率とIBS加熱率のつり合いによって決まってしまうことになる。

参考文献

- [1] H.Okamoto, Proc. PAC2011, in press.
- [2] S.Ichmaru, Rev. Mod. Phys. 54, 1017 (1982).
- [3] H.Okamoto, H.Sugimoto, Y.Yuri, J. Plasma Fusion Res. SERIES, Vol.8, 950 (2009).
- [4] H.Okamoto, K.Yokoya, Nucl. Instr. and Meth. A 482, 51 (2002).
- [5] J.Wei, H.Okamoto, A.M.Sessler, Phys. Rev. Lett. 80, 2606 (1998).
- [6] H.Okamoto, H.Tanaka, Nucl. Instr. and Meth. A 437, 178 (1999).
- [7] R.W.Hasse, J.P.Schiffer, Annals of Physics 203, 419 (1990).
- [8] I.Hofman, L.J.Laslett, L.Smith, I.Haber, Part. Accel., Vol.13, 145 (1983).
- [9] S.Schröder, et al, Phys. Rev. Lett. 64, 2901 (1990).
- [10] J.S.Hangst, M.Kristensen, J.S.Nielsen, O.Poulsen, J.P.Schiffer, P.Shi, Phys. Rev. Lett. 67, 1238 (1991).
- [11] H.Okamoto, A.M.Sessler, D.Möhl, Phys. Rev. Lett. 72, 3977 (1994).

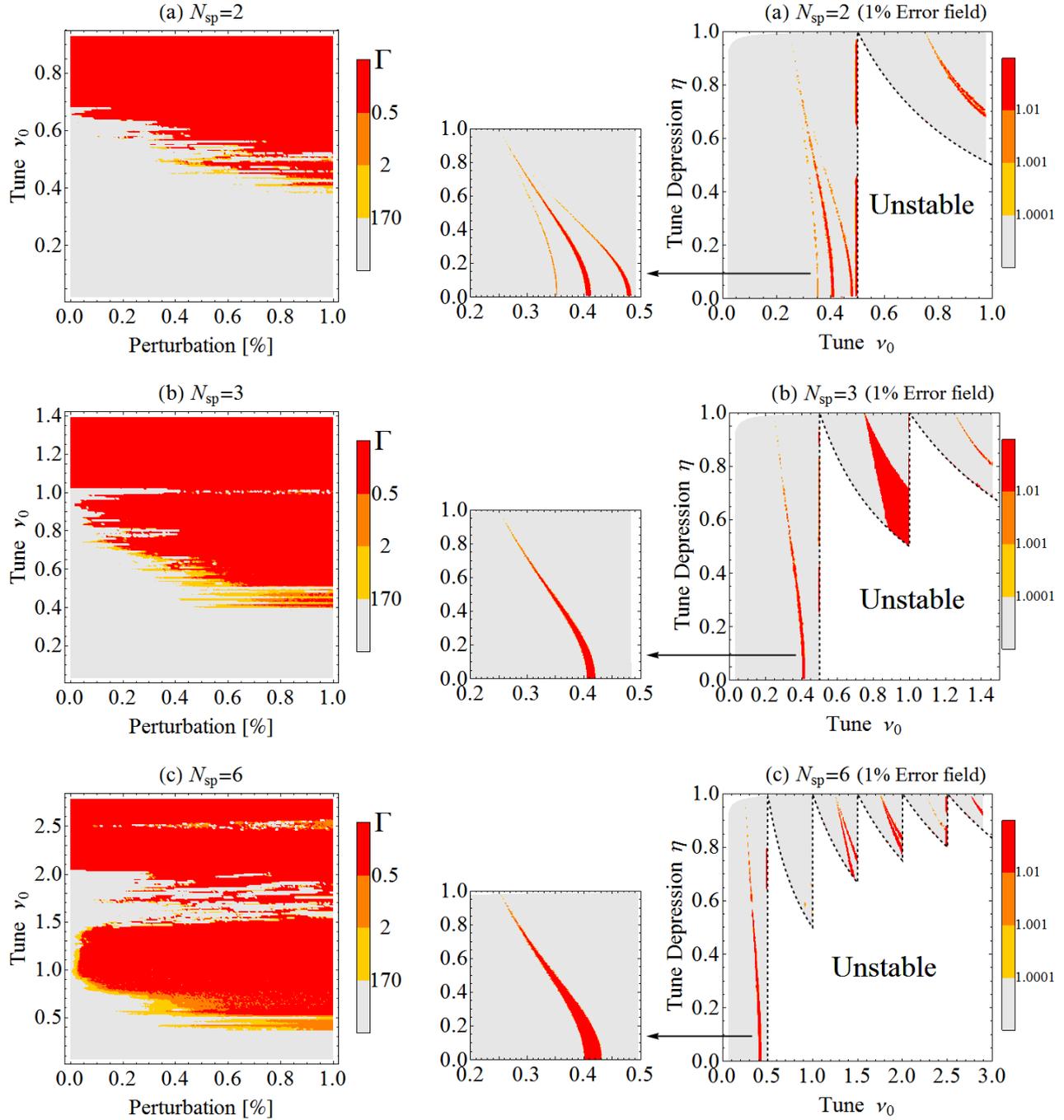


図3: 分子動力学シミュレーションの結果。
 (a) 2 回対称性 ($N_{sp} = 2$), (b) 3 回対称性 ($N_{sp} = 3$), (c) 6 回対称性 ($N_{sp} = 6$) を有する蓄積リングを想定し、それぞれのケースで、磁場誤差の効果に対応する長周期の正弦摂動波 ($N_{sp} = 1$) を重畳してビーム冷却シミュレーションを行った。縦軸はリング1周あたりのチューン ν_0 、横軸は摂動の強さを表す。最終的に到達したプラズマ結合定数の大きさを色分けして表示してある。

図4: 線形ブラソフ解析の結果。図3のシミュレーションで考慮した状況を想定し、2次元のブラソフ理論に基づいて、2次共鳴 ($m = 2$) による不安定領域をプロットしたものである。摂動正弦波の基本集束正弦波に対する振幅は1%に固定してある。縦軸はチューン降下率 η 、横軸はリング1周あたりのチューン ν_0 である。左図はクーロン結晶生成可能な領域の境界付近を拡大したものである。