Proceedings of the 2nd Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan
and the 30th Linear Accelerator Meeting in Japan (July 20 - 22, 2005, Tosu Japan)

CANONICAL PERTURBATION FORMULATION FOR NONLINEAR CHROMATICITY OF CIRCULAR ACCELERATORS

Masaru Takao*
JASRI/SPring-8
1-1-1 Kouto, Mikazuki, Sayo-gun, Hyogo 679-5198

Abstract

最近、我々は非線形クロマティシティの高次摂動公式を導いた。そこでは移送行列が使われ、三次までの具体的な表式が求められた。ここでは、摂動計算に優れている正準摂動法を非線形クロマティシティの定式化に適用し、簡便に高次公式の導出ができることについて紹介する。

正準摂動法による円形加速器の非線形クロマティシティ高次公式の導出

1． はじめに

現代の蓄積リングにおいて、その強力な収束力のため蓄積粒子の力学は非線形性が無視できなくなっている。加えて、より長いビーム寿命や少ないビーム損失のため広いモーメンタムアクセプタンスが求められ、設計エネルギーから遠く離れた粒子の運動まで考察する必要に迫られている。このような観点から、我々は非線形クロマティシティの正確な高次公式を導いた [?]。

先のクロマティシティ高次公式の導出において、我々は移送行列を用い摂動的にクロマティシティの積分表式を計算した。次数を上げるに従って計算が複雑になるのは当然であるが、高次になると移送行列による表式には、当該次数のクロマティシティだけでなく低次のものの積が現れ、純粋にその次数のクロマティシティを抽出することが難しくなる。我々はこれを解決するためフーリエ変換を採用したが、この手続きが計算の複雑さに拍車を掛けている。

一方、非線形振動では正準摂動法が有効であることが知られている。正準摂動法はベータトロンチューンなどの周期運動を特徴づける量を直接計算するので、クロマティシティの計算においても効力が期待される。本論文では、実際そうであることを明らかにする。得られた積分表式は比較的簡単な形をしており、高次の一般公式への拡張が可能であることを示す。

先ず準備として、一般の正準摂動法について簡単に説明する。その後、これを非線形クロマティシティの定式化に適用し、その高次公式を導く。

2． 正準摂動法

可積分系のハミルトニアン H_0 に摂動ポテンシャル V が付け加わったハミルトニアン

$$H = H_0\left(J, s\right) + V\left(\phi, J, s\right), \tag{1}$$

で記述される系を考える。ここで、H は無摂動系の作用角変数 J および ϕ で表されているものとする。また、s は独立変数で今の場合基準点からの軌道長である。よく知られているように [?]、ベータトロン運動に関しては

$$H_0\left(J, s\right) = \frac{J}{\beta\left(s\right)} \tag{2}$$

である。ただし、$\beta(s)$ はベータトロン関数である。この時、無摂動系の運動方程式は

$$\frac{dJ}{ds} = -\frac{\partial H_0}{\partial \phi} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial H_0}{\partial J} = \frac{1}{\beta\left(s\right)} \tag{4}$$

である。

以下では、摂動ポテンシャル V は、摂動を特徴付けるパラメーター δ で

$$V\left(\phi, J, s\right) = \sum_{n=1} \delta^n V_n\left(\phi, J, s\right) \tag{5}$$

と展開されているものとする。正準摂動法では、問題は正準変換によって摂動系の作用角変数を求めることによって解かれる。ここでは、δ に依存する type 2 母関数 $S(\phi, \bar{J}, s)$ を用いる。ただし、$\bar{\ }$ は変換後の変数を表す。仮定により、母関数 S は恒等変換に近いので δ に関して

$$S\left(\phi, \bar{J}, s\right) = \phi\bar{J} + \sum_{n=1} \delta^n S_n\left(\phi, \bar{J}, s\right) \tag{6}$$

と展開できる。この時、新しい変数とハミルトニアンは

$$\bar{\phi} = \phi + \sum_{n=1} \delta^n S_{n,\bar{J}}\left(\phi, \bar{J}, s\right), \tag{7}$$

$$J = \bar{J} + \sum_{n=1} \delta^n S_{n,\phi}\left(\phi, \bar{J}, s\right), \tag{8}$$

$$\bar{H} = H + \sum_{n=1} \delta^n S_{n,s}\left(\phi, \bar{J}, s\right) \tag{9}$$

* takao@spring8.or.jp

となる。上式で、コンマ以降の添字はその変数に関する偏微分を表す。

もし、角変数 ϕ が分かれば、摂動系の新しいハミルトニアン $\bar{H}$ は新しい作用変数 $\bar{J}$ と軌道長 s で表すことができる。以下、これを実現するよう変換の母関数 S を決定する。元のハミルトニアン (**??**) を考慮しながら、新しいハミルトニアン $\bar{H}$ (**??**) に新しい作用変数 J (**??**) を代入すると

$$\bar{H}\left(\bar{J},s\right)=H_0\left(\bar{J},s\right)+\sum_{n=1}\delta^n K_n\left(\bar{J},s\right) \tag{10}$$

を得る。ただし、

$$K_1=V_1+H_{0,\bar{J}}S_{1,\phi}+S_{1,s}, \tag{11}$$
$$K_2=V_2+V_{1,\bar{J}}S_{1,\phi}+H_{0,\bar{J}}S_{2,\phi}+S_{2,s}, \tag{12}$$
$$K_3=V_3+V_{2,\bar{J}}S_{1,\phi}+V_{1,\bar{J}}S_{2,\phi}+\frac{1}{2}V_{1,\bar{J}\bar{J}}S_{1,\phi}^2 +H_{0,\bar{J}}S_{3,\phi}+S_{3,s}, \tag{13}$$
$$\cdots.$$

先に述べた通り摂動系のハミルトニアン $\bar{H}$ が角変数 ϕ を含まないよう、即ち摂動項 K が作用変数 $\bar{J}$ と軌道長 s のみの関数になるよう母関数 S_n を決定する。これは K_n の定義式を角変数 ϕ に関して定数項と周期項に分離することによって実行できる。つまり、定数項を K_n と置き、周期項が消えるように S_n を決める。元々、無摂動系のハミルトニアン H_0 は角変数 ϕ に関して定数であったことと、作用変数 J の正準不変性から母関数 S_n が角変数 ϕ の周期関数であるので

$$\left\langle S_{n,\phi\,\mathrm{or}\,s}\right\rangle\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi S_{n,\phi\,\mathrm{or}\,s}=0 \tag{14}$$

となることを考慮すると、K_n と S_n が順次求められる。次数の低い方から見ていくと、一次では

$$K_1=\left\langle V_1\right\rangle \tag{15}$$

および

$$S_{1,s}+H_{0,\bar{J}}S_{1,\phi}=-V_1+\left\langle V_1\right\rangle \tag{16}$$

である。次は同様に、

$$K_2=\left\langle V_2\right\rangle+\left\langle V_{1,\bar{J}}S_{1,\phi}\right\rangle \tag{17}$$

および

$$S_{2,s}+H_{0,\bar{J}}S_{2,\phi} =-V_2-V_{1,\bar{J}}S_{1,\phi}+\left\langle V_2\right\rangle+\left\langle V_{1,\bar{J}}S_{1,\phi}\right\rangle, \tag{18}$$

となる。一般に、

$$S_{n,s}+H_{0,\bar{J}}S_{n,\phi} =-F_n\left(V_1,\ldots,V_n,S_1,\ldots,S_{n-1}\right). \tag{19}$$

なる S_n の再帰公式が得られる。ここでベータトロン運動に関しては $H_{0,\bar{J}}=1/\beta\left(s\right)$ であるから、

$$S_{n,s}\left(\phi,\bar{J},s\right)+\frac{1}{\beta\left(s\right)}S_{n,\phi}\left(\phi,\bar{J},s\right) =-F_n\left(\phi,\bar{J},s\right) \tag{20}$$

と書き換えられる。

母関数 S_n、周期項 F_n とも ϕ の周期関数であるから、フーリエ解析

$$S_n\left(\phi,\bar{J},s\right)=\sum_m\tilde{S}_n\left(m,\bar{J},s\right)e^{im\phi}, \tag{21}$$
$$F_n\left(\phi,\bar{J},s\right)=\sum_m\tilde{F}_n\left(m,\bar{J},s\right)e^{im\phi} \tag{22}$$

を行うと、母関数 S_n の決定方程式は

$$\frac{\partial\tilde{S}_n}{\partial s}\left(m,\bar{J},s\right)+\frac{im}{\beta\left(s\right)}\tilde{S}_n\left(m,\bar{J},s\right) =-\tilde{F}_n\left(m,\bar{J},s\right) \tag{23}$$

なる軌道長 s に関する一次常微分方程式ととなり、その周期解は容易に分かるように

$$\tilde{S}_n\left(m,\bar{J},s\right)=\frac{i}{2\sin\left(\pi m\nu\right)} \times\int_s^{s+C}ds'e^{im\left[\psi(s')-\psi(s)-\pi\nu\right]}\tilde{F}_n\left(m,\bar{J},s'\right) \tag{24}$$

である。ただし、C は周長、$\psi(s)=\int_0^s ds'/\beta(s')$ は無摂動系のベータトロン位相、$\nu=\int_0^C ds'/(2\pi\beta(s'))$ はそのベータトロンチューンである。結局、変換の母関数 S_n は

$$S_n\left(\phi,\bar{J},s\right)=\sum_m\frac{i}{2\sin\left(\pi m\nu\right)} \times\int_s^{s+C}ds'e^{im\left[\phi+\psi(s')-\psi(s)-\pi\nu\right]}\tilde{F}_n\left(m,\bar{J},s'\right) \tag{25}$$

と求められる。

3．非線形クロマティシティの場合

準備が整ったのでクロマティシティの定式化を実行しよう。この場合、設計モーメンタム p_0 からのモーメンタム偏差 $\delta=(p-p_0)/p_0$ が摂動パラメーターに対応する。また、摂動ポテンシャルは

$$V_n\left(\phi,J,s\right)=\frac{1}{2}J\beta\left(s\right)G_n\left(s\right)\left(1+\cos 2\phi\right) \tag{26}$$

で与えられる。ただし、G_n は収束力の摂動で、ディスパージョン関数による具体的な表式は文献 [?] に見つけられる。

運動方程式から明らかなように、高次チューンシフト、即ち高次クロマティシティξ_n は摂動ハミルトニアン K_n の $\bar{J}$ に関する偏微分を一周積分したものである：

$$\xi_n=\frac{1}{2\pi}\int_s^{s+C}ds'\frac{\partial K_n}{\partial\bar{J}}\left(\bar{J},s'\right). \tag{27}$$

最低次では

$$K_1\left(\bar{J},s\right)=\frac{1}{2}\bar{J}\beta\left(s\right)G_1\left(s\right) \tag{28}$$

なので、直ちに線形クロマティシティ

$$\xi_1 = \frac{1}{4\pi}\int_s^{s+C} ds'\beta(s')\,G_1(s') \tag{29}$$

が得られる。G_1 に具体的な表式を代入してやれば、文献 [?] に示されているとおりよく知られた線形クロマティシティの積分公式が得られる。

次の次数に進むためには、一次の正準変換の母関数 S_1 を求めなければならない。一次の周期項 F_1 は

$$F_1(\phi,\bar{J},s) = \frac{1}{2}\bar{J}\beta(s)\,G_1(s)\cos 2\phi \tag{30}$$

だから、式 **(??)** から

$$S_1(\phi,\bar{J},s) = -\frac{\bar{J}}{4\sin(2\pi\nu)}\int_s^{s+C} ds'\beta(s')\,G_1(s') \times\sin 2\left[\phi+\psi(s')-\psi(s)-\pi\nu\right] \tag{31}$$

である。この時、

$$K_2(\bar{J},s) = \langle V_2\rangle + \langle V_{1,\bar{J}}S_{1,\phi}\rangle \tag{32}$$

だから、上で得られた結果を代入すると二次のクロマティシティξ_2 の積分表式

$$\xi_2 = \frac{1}{4\pi}\left[\int_s^{s+C} ds'\beta(s')\,G_2(s') - \frac{1}{4\sin(2\pi\nu)} \times\int_s^{s+C} ds'\beta(s')\,G_1(s')\int_{s'}^{s'+C} ds''\beta(s'')\,G_1(s'') \times\cos 2\left\{\psi(s'')-\psi(s')-\pi\nu\right\}\right] \tag{33}$$

が得られる。この二次クロマティシティ積分表式は、二重積分の積分領域およびその係数が 2 だけ文献 [?] で得られたものと異なっている。しかしながら、積分の変数変換を行うことによって両者が一致することが示される。

以下、計算は次数が上がるにつれて複雑になるが、機械的に高次クロマティシティ積分公式を書き下すことができる。例えば三次は、摂動ポテンシャル V が $\bar{J}$ に関して線形であること $(V_{n,\bar{J}\bar{J}}=0)$ を考慮すれば、摂動ハミルトニアン K_3 は

$$K_3(\bar{J},s) = \langle V_3\rangle + \langle V_{2,\bar{J}}S_{1,\phi}\rangle + \langle V_{1,\bar{J}}S_{2,\phi}\rangle \tag{34}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\xi_3 = \frac{1}{4\pi}\Bigg[&\int_s^{s+C} ds'\beta(s')\,G_3(s') - \frac{1}{4\sin(2\pi\nu)}\\ &\times\int_s^{s+C} ds'\beta(s')\,G_2(s')\int_{s'}^{s'+C} ds''\beta(s'')\,G_1(s'')\\ &\times\cos 2\left\{\psi(s'')-\psi(s')-\pi\nu\right\} - \frac{1}{4\sin(2\pi\nu)}\\ &\times\int_s^{s+C} ds'\beta(s')\,G_1(s')\int_{s'}^{s'+C} ds''\beta(s'')\,G_2(s'')\\ &\times\cos 2\left\{\psi(s'')-\psi(s')-\pi\nu\right\}\\ &+\frac{1}{8\sin^2(2\pi\nu)}\int_s^{s+C} ds'\beta(s')\,G_1(s')\\ &\times\int_{s'}^{s'+C} ds''\beta(s'')\,G_1(s'')\int_{s''}^{s''+C} ds'''\beta(s''')\,G_1(s''')\\ &\times\cos 2\left\{\psi(s''')-\psi(s')-2\pi\nu\right\}\Bigg]\end{aligned} \tag{35}$$

となる。この表式も文献 [?] で得られたものと多重積分の積分領域が異なっている。特に三重積分においては、非積分関数の三角関数の形まで変わっている。しかし、これが見かけだけの問題で両者が一致することが、例えば文献 [?] で用いたフーリエ変換を行うことによって示される。

4． まとめ

正準摂動法による非線形クロマティシティの定式化を行った。得られた表式は、以前に移送行列を用いて運動方程式を解くことにより求めたものと一致していることが確認された。

移送行列による定式化に比べると、正準摂動法ではハミルトニアンから直接チューンシフト即ちクロマティシティが求められるので、計算がかなり簡略化できた。移送行列による定式化では、高次項の計算に当該次数のクロマティシティの他に低次のものの積が現れ、その次数のクロマティシティのみを抽出することが困難であった。閉じた形式で三次のクロマティシティの表式を取り出すために、リング周回に関するフーリエ変換を用いなければならなかった。この操作は次数が上がるほど複雑になり、三次より上の非線形クロマティシティを求めることは事実上不可能であった。最近、Hill 方程式にまで立ち返って Hill 行列式を応用することにより、クロマティシティの計算が簡略化できることが示された [?]。しかしながら、そこでもフーリエ変換の使用が不可避であり、最終的な表式が複雑であることには変わりがない。

ここで与えた正準摂動によるクロマティシティの定式化では、直接これが求められるため見通しが良く高次への拡張が容易である。実用上三次もあれば十分であり実際に数値計算ができるかどうかは別にして、高次クロマティシティの一般公式を書き下すことも可能である。

末尾ながら、先の論文 [?] で共同研究を行った清水、早乙女、田中各博士に感謝致します。

参考文献

[1] M. Takao, H. Tanaka, K. Soutome, and J. Schimizu, Phys. Rev. E **70** 016501 (2004).

[2] R.D. Ruth, “Single-Particle Dynamics in Circular Accelerators”, in *Physics of Particle Accelerators*, AIP Conf. Proc. **153**, 150 (American Institute of Physics, New York 1987).

[3] C.X. Wang, Phys. Rev. E **71** 036502 (2004).