

# 大交差角ビーム - ビーム衝突における wake field および Head-Tail 不安定性 WAKE FIELD AND HEAD-TAIL INSTABILITY IN BEAM-BEAM COLLISION WITH A LARGE CROSSING ANGLE

黒尾奈未<sup>A,B)</sup>、大見和史<sup>\*A)</sup>、生出勝宣<sup>A)</sup>  
Nami Kuroo<sup>\*A, B)</sup>, Kazuhito Ohmi<sup>A)</sup>, Katsunobu Oide<sup>A)</sup>

<sup>A)</sup>KEK

<sup>B)</sup>University of Tsukuba

## Abstract

Collision scheme with a large crossing angle is being very popular in design of electron positron collision accelerator. In SuperKEKB project, a collision with a large crossing angle is performed to improvement luminosity. Future collision accelerator, FCC is also designed with large crossing angle. We discuss that strong wake field is induced by the beam-beam interaction. Recently strong-strong beam-beam simulations have shown a strong coherent instability in head-tail mode in collision with a large crossing angle. This instability can be explained by the wake field according to this report.

## 1. はじめに

近年の電子・陽電子衝突型加速器設計では大交差角を用いた衝突形式を採用している。SuperKEKB 加速器も大交差角での衝突方式を採用してルミノシティ向上を目指しており、また将来加速器である FCC(周長 100km) も大交差角をベースに設計され始めている [1-5]。

しかし大交差角での Strong-strong beam-beam シミュレーションでコヒーレント head-tail 不安定性が確認された [6-10]。これにより、大交差角で衝突させることによって不安定性の観点から問題があるのではないかということが懸念された。我々は strong-strong beam-beam シミュレーションで見られる不安定性の理論を構築し、ビーム不安定性の理解を深め、将来加速器の設計の指針としようとしている。本報告では、この不安定性をビームビーム相互作用によって誘起される wake field を用いて説明することを試みる [11]。そしてこの wake field を用いて粒子トラッキングシミュレーション、固有値解析を行い、どのような不安定性が起こるのかを研究する。

## 2. BEAM-BEAM 衝突によって誘起される WAKE FIELD の計算

通常の wake はビームの分布 (ダイポール) の変化に応じて自分自身の別の場所に運動量キックを与えるというものである。今回は、ビームの分布に応じて衝突相手のビームの運動量キックに変化が生じさせるという状況を考え、これを cross wake と呼ぶことにする。

まず、衝突時におけるバンチの運動量変化は式 (1) のように表される。

$$\Delta p_y + i\Delta p_x = \frac{Nr_e}{\gamma} (F_y(x, y) + iF_x(x, y)) \quad (1)$$

ビームがガウス分布をしている場合は式 (2) のような

形をしている [12]。

$$F = F_y + iF_x = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Sigma} [w(A) - \exp(-B)w(C)] \quad (2)$$

$A, B, C$  は以下で定義されている。

$$A = \frac{x + iy}{\Sigma}, \quad B = \frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}, \quad C = \frac{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x + i\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y}{\Sigma} \quad (3)$$

ここで  $\Sigma = \sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}$ 、 $w$  は複素エラー関数である。

$$w(z) = e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-iz) = e^{-z^2} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right) \quad (4)$$

式 (1)、(2) を用いて cross wake はどのような形をしているのかを考える。電子・陽電子の衝突イメージを Figure 1 に示す。 $\theta$  は半交差角であり、ビーム分布が重なって衝突している領域は  $\sigma_x/\theta$  である。衝突領域に対するバンチ長

$$\theta_P = \frac{\sigma\theta}{\sigma_x} \quad (5)$$

を Piwinski 角と呼んでいる [13]。相対論的ビームの衝突は同じ  $s$  位置同士の分布が相互作用する。図において  $\Delta x$  ずれた陽電子ビームと相互作用するのは電子ビームの A の領域である。衝突の進行によって A の領域即ち  $z$  はずれていく。A の領域が受ける、 $e^+$  の  $x$  がずれていない場合と  $\Delta x$  だけずれた場合の力の差を求める。まず  $e^+$  の  $x$  がずれていない場合であるが、この場合は  $F_x$  の引数に  $x_- - x_+$  が入り、バンチの運動量変化 (式 (1)) は式 (6) のようになる。

$$\Delta P_0 = -\frac{N_+\rho_0^{(+)}\Delta z+r_e}{\gamma_-} F_x(x_- - x_+) \quad (6)$$

次に  $e^+$  の  $x$  が  $\Delta x$  だけずれた場合は  $F_x$  の引数に  $x_+ - x_- - \Delta x_+$  が入り、バンチの運動量変化 (式 (1))

\*ohmi@post.kek.jp

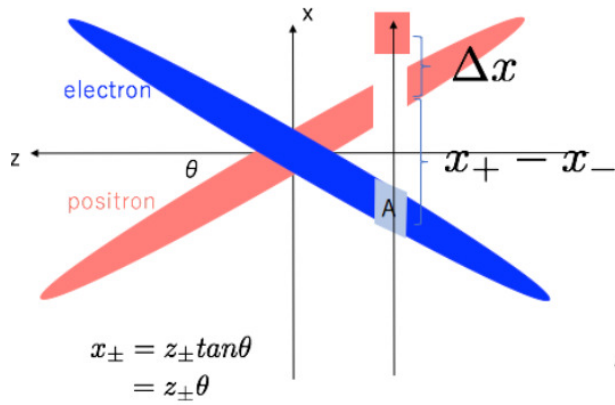


Figure 1: Schematic views of the cross wake field model.

は式 (7) のようになる。よって力の差は式 (8) のような形になる。

$$\Delta P_1 = -\frac{N_+ \rho_0^{(+)} \Delta z_+ r_e}{\gamma_-} F_x(x_- - x_+ - \Delta x_+) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta p_x^{(-)} &= \Delta P_1 - \Delta P_0 \\ &= \frac{N_+ \rho_0^{(+)} \Delta z_+ r_e}{\gamma_-} \frac{\partial F_x}{\partial x} \Big|_{x=(z_- - z_+) \theta_c} \Delta x_+ \quad (8) \end{aligned}$$

式 (8) の右辺を以下の式のように表すことで cross wake を導入する。

$$\Delta p_x^{(-)} = -W^{(-)}(z - z') \rho_0^{(+)} \Delta x_+ \Delta z \quad (9)$$

cross wake に相当する部分を取り出すと式 (10) になり、これが cross wake である。

$$W_x^{(-)}(z_- - z_+) = -\frac{N_+ r_e}{\gamma_-} \frac{\partial F_x}{\partial x} \Big|_{x=(z_- - z_+) \theta_c} \quad (10)$$

ビームビーム力を微分すると以下の式 (11) のようになり、これを用いて cross wake を計算する。

$$w'(z) = -2zw(z) + \frac{2i}{\sqrt{\pi}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\Sigma} \left[ \frac{2i}{\sqrt{\pi}\Sigma} \left( 1 - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \exp(-B) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2A}{\Sigma} w(A) + \left\{ \frac{x}{\sigma_x^2} + \frac{2\sigma_y}{\Sigma\sigma_x} C \right\} \exp(-B) w(C) \right] \quad (11) \end{aligned}$$

Figure 2 は  $F_x$  の  $z$  に対する関数であり、Figure 3 は  $F_x$  を微分して出した cross wake の計算結果である。計算する際に用いたパラメータは Table 1 に示す。陽電子ビームのパラメータを入れ、N は相手ビームである電子ビームの値を入れている。

$W$  の最小値は  $z - z' = 0$  の時であり、これを式 (8) に代入すると 271 である。

Table 1: Parameters of SuperKEKB

|                               |                       |
|-------------------------------|-----------------------|
| Bunch population( $10^{10}$ ) | 6.5( $e^-$ )          |
| Energy (GeV)                  | 4                     |
| Bunch length, $\sigma$ (mm)   | 5.0                   |
| Tune, $\nu_x$                 | 44.53                 |
| Synchrotron tune $\nu_s$      | 0.024                 |
| $\beta_x^*$ (mm)              | 32                    |
| $\beta_y^*$ (mm)              | 0.27                  |
| $\theta$ (mrad)               | 41.5                  |
| $\theta_{c/P}$                | 41.5 / 20             |
| $\varepsilon_y$ (m)           | $8.64 \times 10^{-9}$ |
| $\varepsilon_x$ (m)           | $3.2 \times 10^{-9}$  |
| $\sigma_\delta$               | $8 \times 10^{-4}$    |

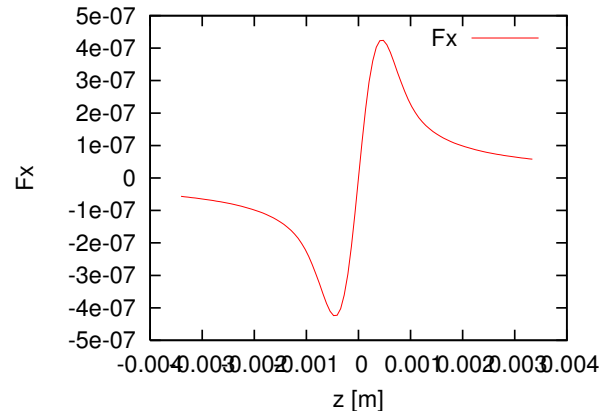


Figure 2: Beam-beam force for gauss distribution.

$$W_x(0) = \frac{N r_e}{\gamma} \frac{1}{\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (12)$$

フラットビーム衝突の場合は  $\sigma_x \gg \sigma_y$  であり、ビームとの結合を考慮してベータを掛ける。

$$\beta_x W_x(0) = \frac{N r_e}{\gamma} \frac{1}{\varepsilon_x} \quad (13)$$

$W=0$  になるのは、 $z \approx \pm 1.8\sigma_x/\theta_c = 1.8\sigma_z/\theta_P$  で  $W$  最大値になるのは  $z \approx \pm 3.1\sigma_x/\theta_c = \pm 3.1\sigma_z/\theta_P$  で  $W(z) \approx 0.28|W_x(0)|$  である。この値からおおよその wake の周波数がわかる。 $\lambda = 6.2\sigma_z/\theta_P$  より  $\omega = 2\pi c/\lambda = 2\pi c\theta_P/6.2\sigma_z$ 。バンチ内の振動を表す量は  $\omega\sigma_z/c = 2\pi\theta_P/6.2$  である。

### 3. 粒子トラッキング

上記で計算された cross wake を用いて粒子トラッキングを行う。相手ビームの  $\rho_x$  に応じて運動量変化は以下の式で表される。

$$\Delta p_{x,\pm}(z_{\pm}) = - \int_{-l}^l W_x^{(\pm)}(z_{\pm} - z'_{\mp}) \rho_x^{(\mp)}(z'_{\mp}) dz'_{\mp}. \quad (14)$$

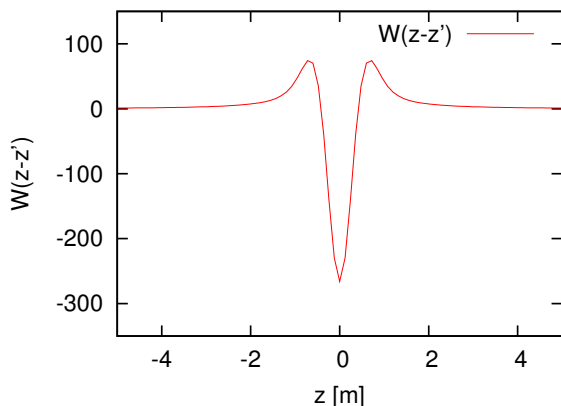
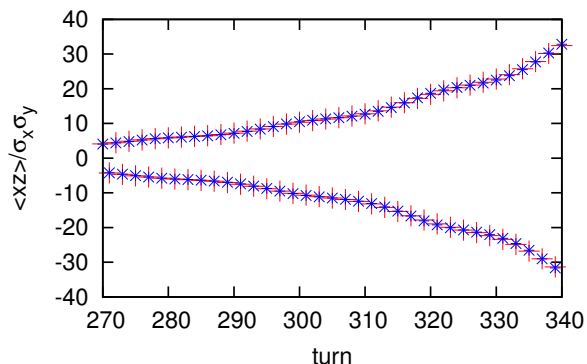


Figure 3: Cross wake field for  $z' = 0$ .



4x8 beam 1 + 4x8 beam 2 \*  
Figure 4:  $\langle xz \rangle$  correlation.

ここで  $l = 3\sigma$  に選ぶ。  $\rho_x$  の計算、  $z'$  での積分について説明する。まず粒子をガウス分布で発生させる。  $z$  方向に  $\pm 3\sigma$  の領域を離散化する。ここでは  $\Delta z = 0.02\sigma$  とした。離散化した密度  $\rho(z_i)$  は  $z_i = i\Delta z - 3\sigma$  において  $z_i \pm \Delta z/2$  に含まれる粒子の数 ( $n(z_i)$ ) から求められる。  $\rho(z_i) = n(z_i)/N$ 。ダイポールモーメント密度  $\rho_x(z_i)$  は平均位置と密度の積  $\sum x_i/n(z_i) \times \rho_i(z_i)$  である。

式 (14) の積分は

$$\Delta p_{x,\pm}(z_{\pm}) = - \sum W_x^{(\pm)}(z_{\pm} - z'_{\mp}) \rho_x^{(\mp)}(z'_{\mp}) \Delta z. \quad (15)$$

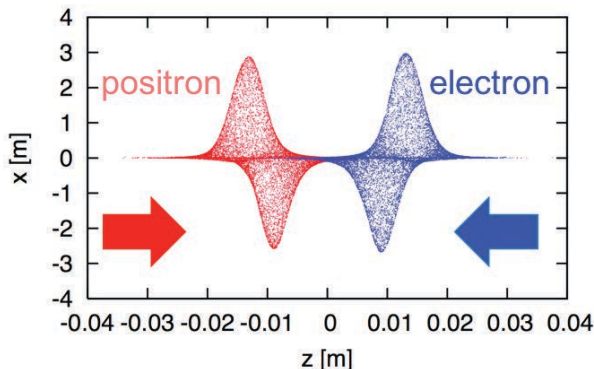
によって表される。  $z$  における粒子の受ける運動量変化  $\Delta p_x(z)$  は式 (15) の  $\Delta p_x(z_i)$  を内挿することによって取得する。

SuperKEKB の strong-strong シミュレーションでは設計の  $\beta_x^* \beta_y^*$  での衝突では不安定性は起きない。  $\nu_x = 0.53$  において  $\beta^*$  を detune して  $\beta_x^* = 8 \times \beta_{x,design}^*$  にしたとき不安定性が起き、  $4 \times \beta_{x,design}^*$  では起こらない [6]。不安定性に対して  $\beta_y^*$  は本質ではない。ここでは  $8 \times \beta_{x,design}^*$  に注目してシミュレーションを行う。

ビームの傾きを特徴づける量として  $\langle xz \rangle / \sigma_z \sigma_x$  を使う。この量は  $\sigma_x$  に対する、  $z = \sigma$  での  $x$  の平均位置である。 Figure 4 に  $\langle xz \rangle / \sigma_z \sigma_x$  の周回ごとの変化を示す。数百ターンでその相関 ( $\langle xz \rangle / \sigma_z \sigma_x$ ) は数十になっており、増幅時間は 30 周である。  $\langle xz \rangle$  は電子陽電子で同じ値になっていて且つ符号が電子陽電子交互に変わっている為、振動の位相が同じであり、チューンは 0.5 である。

Figure 5 に  $\langle x \rangle = 1$  m の時の電子/陽電子パンチの分布を示す。2 ビーム全く同じ分布  $\rho_x^+(z) = \rho_x^-(z)$  であり、やはり  $z$  毎のベータatron位相が同じであることが分かる。このような場合を  $\sigma$  モードという。逆に分布が全く反対  $\rho_x^+(z) = -\rho_x^-(z)$ 、  $z$  毎のベータatron位相が反対の状態を  $\pi$  モードという。

ビームの振動を  $\sigma$  モードまたは  $\pi$  モードに限定すると、cross wake は通常の wake として扱うことができる。式 (14) に  $\rho_x^{\pm}$  の関係を代入することで、両ビームとも自分自身の分布に対して運動量変化を受



8x8 beam 1 8x8 beam 2  
Figure 5: Beam distribution at the collision.

ける通常の wake force の式になる。

$$\Delta p_x(z) = \mp \int_{-l}^l W_x(z - z') \rho_x(z') dz \quad (16)$$

つまり通常の wake force の式において、  $\sigma/\pi$  で式中の符号が変わるだけと考えてよい。

式 (16) を使って通常の wake の粒子トラッキングシミュレーションが出来る。 Figure 6 はそのシミュレーションを行った結果である。  $\sigma$  モード即ち式 (16) の符号をマイナスにとったシミュレーションを粒子数  $N = 1.25 \times 10^{10}$  に対して行った。これから不安定性の閾値は  $2.0 \times 10^{10}$  であることが分かった。また、  $\pi$  モード即ち式 (16) の符号をプラスにとった場合、粒子数  $5.0 \times 10^{10}$  においても安定であった。式 (14) を使ったシミュレーションの結果と一致した。

#### 4. 固有値解析

次に式 (16) で表される運動に対する固有状態を解析する。シンクロtron位相空間上でのビーム分布の  $x$ 、  $p$  の平均位置を考える。その際、シンクロtron位相空間を離散化し、径方向  $r_i \equiv \sqrt{2J_i}$ 、角度 (シンクロtron位相) 方向  $\phi_j$  で表す。角度方向の離散化は  $n_s = 1/\nu_s$  ごとで行う。ここで  $\nu_s$  は 1/整数に近

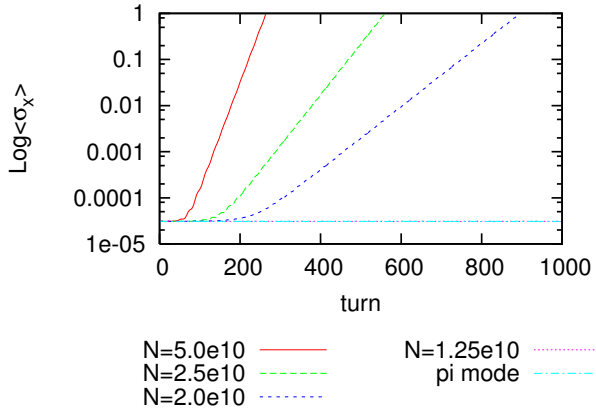


Figure 6: Single beam tracking simulation.

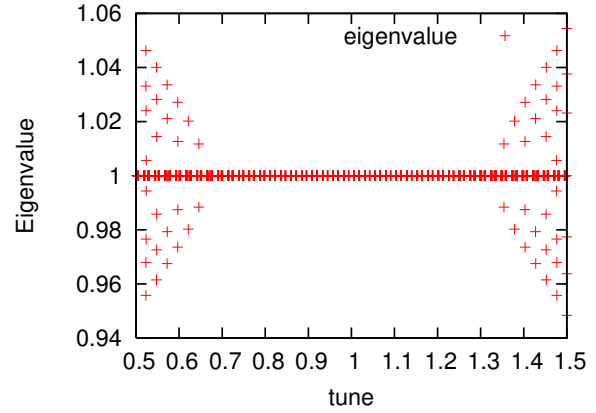


Figure 7: Eigenvalue for SuperKEKB paramater.

似することになる。位相空間上の点は以下のように表すとする。

$$x_{ij} = x(J_i, \phi_j) \quad p_{ij} = p(J_i, \phi_j) \quad \psi_i = \psi(J_i) \quad (17)$$

$$r_i \equiv \sqrt{2J_i} = i\Delta r \quad \phi_j = 2\pi\nu_s j \quad z_{ij} = \sqrt{2\beta_z J_i} \cos \phi_j \quad (18)$$

ここで  $\beta_z = \sigma_z/\sigma_\delta$ ,  $\varepsilon = \sigma\sigma_\delta$  である。

$\psi_i$  はシンクロトン位相空間上の密度分布で、 $J$  のみによりシンクロトン位相には依らない  $\psi_i = e^{-J_i/\varepsilon}/2\pi\varepsilon$ 。

$(x_{ij}, p_{ij})$  の長さ  $2n_s n_J$  のベクトルの周回による変換を考える。周回に対するシンクロトン振動は  $j \rightarrow j+1$  によって表すことができる。 $x, p$  はベータトン振動をする。シンクロベータトン振動による変換は以下の式に表される。

$$\begin{pmatrix} x_{ij} \\ p_{ij} \end{pmatrix} = \sum_{i'j'=1}^{n_J n_s} M_0 \begin{pmatrix} x_{i'j'} \\ p_{i'j'} \end{pmatrix}$$

$$M_{0,ij'i'j'} = \delta_{i,i'}\delta_{j-1,j'} \otimes \begin{pmatrix} \cos \mu_x & \sin \mu_x \\ -\sin \mu_x & \cos \mu_x \end{pmatrix} \quad (19)$$

ベータトン変数は  $x/\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}p$  によって規格化してある。そして wake によるキックは以下の式によって表される。

$$M_{W,ij'i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_x W(z_{ij} - z_{i'j'}) \psi_{i'} \Delta J \Delta \phi & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Wake を含む周回行列  $M_t = M_W M_0$  の固有値問題を解く。行列の大きさは  $(2n_s n_J)^2$  である。 $M_0$  も  $M_W$  もシンプレクティックであるため、固有値は  $\lambda_i = e^{\pm i\mu}$  の形で表される。 $\mu$  が実数なら振動は安定で、複素数ならその虚数部が振動の増幅度である。 $n_J = 20$  にとる。チューンが 0.0244 なので  $1/0.0244 = 40.98$  なので  $n_s = 41$  である。Table 1 に示す、SuperKEKB のパラメータで固有値  $\lambda_i (i = i, 2n_s n_J)$  を求めた。ベータは水平・垂直共に設計値の 8 倍である。結果を Figure 7 に示す。横軸チューンは  $(\tan^{-1}(\text{Im}\lambda_i/\text{Re}\lambda_i))/2\pi$ 、縦

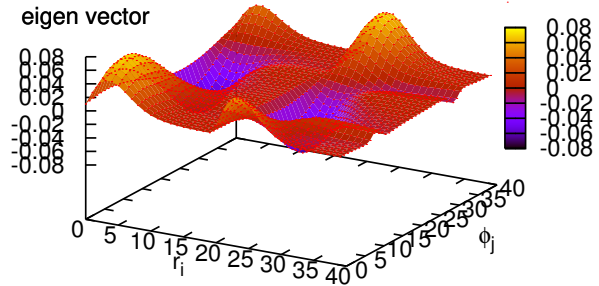


Figure 8: Eigenvector for SuperKEKB paramater.

軸は  $|\lambda_i|$  である。チューンが 0.7 未満、1.3 以上で  $\sigma$  モードで不安定が起き、0.5 で最も不安定になるという事が分かる。これは Figure 4 のシミュレーション結果と一致する。

固有ベクトルを Figure 8 に示す。 $r_i = 1, 20$  は  $x(J_i, \phi_j)$ ,  $r_i = 20, 40$  は  $p(J_{i-20}, \phi_j)$  を示す。図より軸モード  $l$  が 2 程度であることが分かる。

## 5. CONCLUSIONS

大交差角 beam-beam 衝突によって誘起される cross wake field の公式を得た。この cross wake field を用いて粒子トラッキング・固有値解析を行い、その結果  $\sigma$  モードにおいてコヒーレントな head-tail 不安定性が起きるということが分かった。この不安定性について SuperKEKB プロジェクトの phase 2 において検証しなければならない。この不安定性の理解は今後の円形電子・陽電子衝突加速器に大きな影響を与えるであろう。

## 参考文献

- [1] P. Raimondi, Proc. 2nd SuperB workshop, Frascati, March 2006.
- [2] M. Zobov *et al.*, Phys. Rev. Lett. 104, 174801 (2010).

- [3] D. Shatilov, E. Levichev, E. Simonov, M. Zobov, Phys. Rev. ST-Accel. Beams 14, 014001 (2011).
- [4] A. Bogomyagkov, E. Levichev, D. Shatilov, Phys. Rev. ST-Accel. Beams 17, 041004 (2014).
- [5] K. Ohmi, F. Zimmermann, Proc. IPAC14, THPRI004.
- [6] K. Ohmi, talk at FCC Week 2016, Rome, 11-15 April 2016.
- [7] K. Ohmi, proceedings of IPAC16, MOZA01.
- [8] <https://indico.cern.ch/event/615842/>
- [9] <https://indico.cern.ch/event/617116/>
- [10] K. Ohmi, N. Kuroo, K. Oide, D. Zhou, F. Zimmermann, submitted to Phys. Rev. Lett.
- [11] K. Ohmi, N. Kuroo, K. Oide, D. Zhou, F. Zimmermann proceedings IPAC17 THPAB021.
- [12] M. Bassetti, G. Erskine, Report No. CERN ISR TH/80-06, 1980.
- [13] A. Piwinski, DESY Report No. DESY 77/18, 1977.