

SuperKEKB 陽電子ダンピングリングの偏向電磁石のモデリング NUMERICAL MODELING OF DIPOLE MAGNETS IN SUPERKEKB POSITRON DAMPING RING

杉本寛、大西幸喜、森田昭夫、小磯晴代、多和田正文、菊池光男、生出勝宣

Hiroshi Sugimoto, Yuki Yoshi Ohnishi, Akio Morita, Haruyo Koiso, Masafumi Tawada, Mitsuo Kikuchi, Katsunobu Oide
High Energy Accelerator Research Organization (KEK)

Abstract

A positron damping ring is being constructed at KEK to produce a low emittance positron injected to the SuperKEKB main ring. A large dynamic aperture is required to accept a large emittance beam delivered from the injector linac. The degradation of the dynamic aperture comes from nonlinear magnetic fields of bending magnets because the sagitta is large compared to a good field region of the magnets. A three-dimensional multipole expansion technique with numerical field calculation is applied to analyze multipole coefficients of the magnets. Those magnets are modeled on the accelerator code SAD as a series of two-dimensional multipole slices. It is confirmed that, although the nonlinear fields severely induce resonant instabilities, the dynamic aperture is larger than requirement of the injection if the lattice has no imperfection.

1. はじめに

SuperKEKB^[1] は電子 (7GeV) と陽電子 (4GeV) の衝突型円形加速器であり、設計ピークルミノシティは $8 \times 10^{35} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ である。SuperKEKB ではルミノシティフロンティアを追求するために、ナノビームスキーム^[2]を採用する。衝突点での両ビーム間の交差角を比較的大きくすることで秒時計効果を緩和し、衝突点でのベータ関数を 0.3 mm まで絞り込むことを可能にする。一方、ベータ関数を絞り込むことで、衝突点領域での非線形効果が顕在化し力学口径が狭くなる。そのため、入射効率の観点から低エミッタンスの入射ビームが必要になる。電子ビームに関してはビーム源に RF 電子銃を採用することで低エミッタンス化を実現する。一方、陽電子ビームに関しては、ダンピングリング (PDR)^[3] を新設することで高品質のビームを主リングに供給する。

PDR にはリニアックから入射されるエミッタンスが比較的大きなビームを安定に周回させられるだけの十分に広い力学口径が必要である。PDR の力学口径を制限している主な要因は偏向電磁石の磁場の非線形性であることが過去の研究で指摘されている。これは偏向電磁石のサジッタが比較的大きい設計となっているためである。本発表では、偏向電磁石のモデリングの改良と力学口径の評価に関して報告する。

2. 偏向電磁石の磁場解析

2.1 PDR の基本セルと偏向電磁石

Figure 1 は PDR の基本セルとそのビーム光学系である。PDR の基本セルは曲げ角の符号が異なる二つの偏向磁石を使った FODO 構造となっている。これにより比較的に低い偏向磁場で短い減衰時間を得ることを可能にしている^[3]。PDR には基本セルに二種類 (B1, B2 電磁石)、直線部と周回部のマッチング部に二種類 (B3, B4 電磁石) の計四種類の偏向磁石が使われる。

各電磁石の磁場解析は OPERA-3D/TOSCA^[4] を用いて行った。Figure 2 は B1 電磁石の解析モデルである。Figure 3 には z 軸上の垂直方向磁場の分布 $B_y(0, 0, z)$ を示す。また、Fig. 4 は $z=0$ および -0.4 m における磁

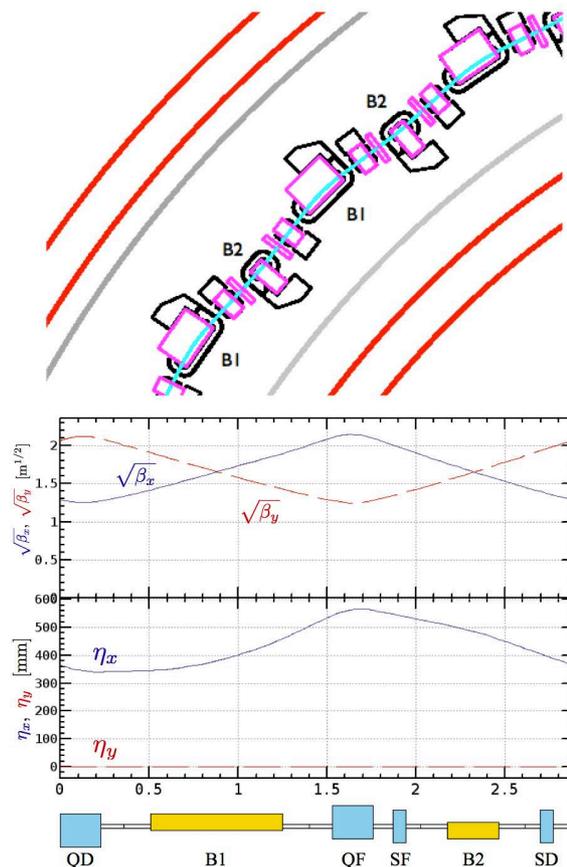


Figure 1: Schematic of the PDR arc cell (upper) and the arc-cell optics (lower).

場の一様性 $(B_y - B_0)/B_0$ である。ここで B_0 は $B_0 \equiv B_y(0, 0, z)$ とする。図中の点線はサジッタを表している。Figure 4 から分かるように磁場の Good Field Region に比べてサジッタが比較的大きい。従って、特にフリッジ領域における磁場の非線形性がビームの運動に与える影響が無視できないと推察される。

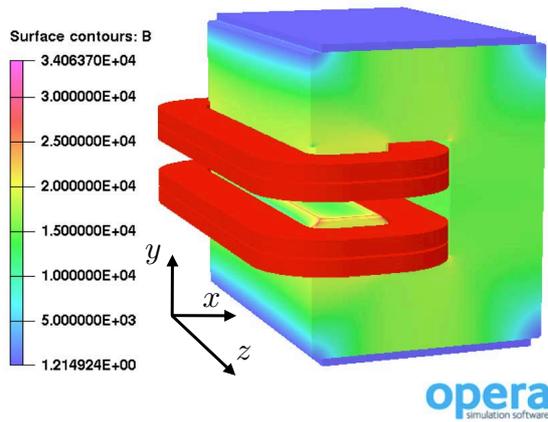


Figure 2: B1 simulation model.

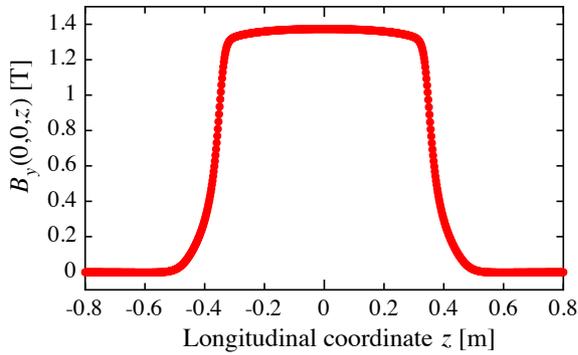


Figure 3: Vertical magnetic field profile along the magnet axis z .

これまでに行われた粒子トラッキングシミュレーションでは、電磁石を多重極磁場のスライスの集合で近似していた。各スライスの磁場の強さは二次元の多重極展開に基づいて決定していた。しかしながら、実際の電磁石では磁場が z 方向に変化するため、この手法では現実の磁場を正確にモデリングできない。そこで、本研究では文献 [5, 6] を参考にし、磁場データを三次元の Maxwell 方程式に基づいて解析した。この解析結果を用いて加速器用計算コード SAD^[7] 上に PDR を構築し、その力学口径を評価した。

2.2 多重極展開

PDR の設計は主リングの設計と同様に KEK で開発されている SAD を用いて行われている。偏向電磁石を z 方向に並べた多重極磁場スライスの集合として SAD 上にモデリングする。各スライスの磁場の強さは Fig. 2 に示した OPERA-3D/TOSCA による磁場解析のデータを多重極展開することで決定する。先行研究では Meadium Plane ($y = 0$ の平面) 上での垂直方向磁場 B_y が

$$B_y(x, 0, z) = \sum_m \frac{1}{m!} \partial_x^m B_y|_{x=0} x^m, \quad (1)$$

と与えられると仮定し、磁場データに多項式回帰を施すことで各多重極磁場の強さを評価していた。しかし、式 (1) は磁場の z 軸方向に対する並進対称性を仮定して

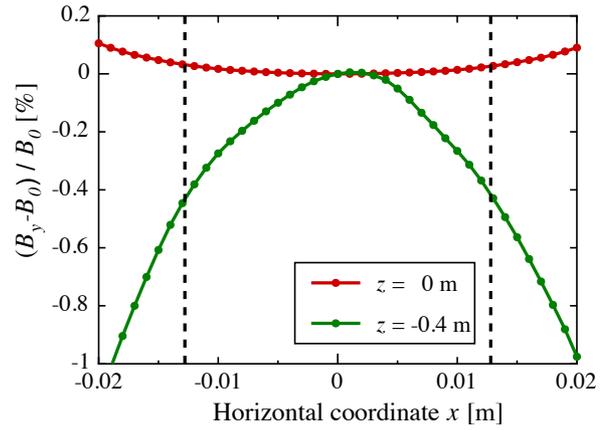


Figure 4: Magnetic field uniformity of B1 magnet at $z = 0$ and -0.4 m.

いるため、特にフリンジ領域のように磁場が z 方向に変化する場合は適用できない。従って、ここでは Maxwell 方程式を満たす様に多重極展開を行う [5, 6]。

自由空間における静磁場は円筒座標系 (r, θ, z) において以下の形で書ける。

$$\begin{aligned} B_r &= \sum_{m=0} \sum_{l=0} (-1)^l \frac{m! (2l+m)}{2^{2l} l! (l+m)!} r^{2l+m-1} \\ &\times \left\{ C_{m,s}^{[2l]}(z) \sin m\theta + C_{m,c}^{[2l]}(z) \cos m\theta \right\}, \\ B_\theta &= \sum_{m=0} \sum_{l=0} (-1)^l \frac{m! m}{2^{2l} l! (l+m)!} r^{2l+m-1} \\ &\times \left\{ C_{m,s}^{[2l]}(z) \cos m\theta - C_{m,c}^{[2l]}(z) \sin m\theta \right\}, \\ B_z &= \sum_{m=0} \sum_{l=0} (-1)^l \frac{m!}{2^{2l} l! (l+m)!} r^{2l+m} \\ &\times \left\{ C_{m,s}^{[2l+1]}(z) \sin m\theta + C_{m,c}^{[2l+1]}(z) \cos m\theta \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $f(z)^{[2l]} \equiv d^{2l} f / dz^{2l}$ である。式 (1) から、Medium Plane における $2m$ 極磁場の r 依存性は r^{m-1} である。一方、式 (2) から $B_\theta(r, 0, z)$ の r 依存性は r^{2l+m-1} であるため、 $C_{m,(s,c)}$ が z に依存する場合には $2m$ 極磁場以外の磁場が存在する。例えば、 $(m, l) = (3, 0)$ に対応する項は r^2 に比例する 6 極磁場を意味するが、 r^2 に比例する項は $C_{1,s}$ の二回微分からも生じる。言い換えると、2 極磁場の z に関する二回微分がゼロでない限り、式 (1) を用いた多項式回帰は 6 極磁場を過小もしくは過大評価してしまう。

このように、一般の三次元磁場を多重極磁場スライスの集合で近似する場合、式 (2) に基づいた評価が必要となる。今、半径 R の円筒表面上の径方向の磁場 $B_r(R, \theta, z)$ が分かっている場合、原理的には全ての展開係数を計算できる。計算の詳細は文献 [5] に譲り、ここではその手順を簡潔に述べる。

まず、 $B_r(R, \theta, z)$ を θ 方向に Fourier 級数展開する。

$$B_r(R, \theta, z) = \sum_m A_m(R, z) \cos m\theta + B_m(R, z) \sin m\theta. \quad (3)$$

次に得られた A_m, B_m を z 方向に Fourier 変換する。

$$\begin{aligned}\tilde{A}_m(R, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp(-ikz) A_m(R, z), \\ \tilde{B}_m(R, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp(-ikz) B_m(R, z).\end{aligned}\quad (4)$$

そして、以下の重み付きの逆 Fourier 変換を行うことで式 (2) の展開係数 $C_{m,(s,c)}$ を計算できる。

$$\begin{aligned}C_{m,c}^{[2l]}(z) &= \frac{1}{2^m m!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(ikz) \\ &\times \frac{(-1)^l k^{m+2l-1}}{I'_m(kR)} \tilde{A}_m(R, k), \\ C_{m,s}^{[2l]}(z) &= \frac{1}{2^m m!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(ikz) \\ &\times \frac{(-1)^l k^{m+2l-1}}{I'_m(kR)} \tilde{B}_m(R, k), \\ C_{m,c}^{[2l+1]}(z) &= \frac{1}{2^m m!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(ikz) \\ &\times \frac{i(-1)^l k^{m+2l}}{I'_m(kR)} \tilde{A}_m(R, k), \\ C_{m,s}^{[2l+1]}(z) &= \frac{1}{2^m m!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(ikz) \\ &\times \frac{i(-1)^l k^{m+2l}}{I'_m(kR)} \tilde{B}_m(R, k).\end{aligned}\quad (5)$$

ここで、 $I_m(x)$ は m 次の第一種変形 Bessel 関数である。式 (1) に基づく手法には多項式をどの次数まで仮定するか、各項の重みをどう選ぶかといった不確定性が残る。一方、この手法は固有関数の直交性を利用しているため、各係数を独立に評価することができる。

2.3 B1 電磁石の多重極磁場

前節の手法を用いて B1 電磁石の磁場データに対して多重極展開を行った。ここでは半径 $R = 2$ cm、 -0.8 m $\leq z \leq 0.8$ m の円筒表面上の磁場データを用いた。総データ点数は周方向に 64 点、 z 方向に 801 点の合計 51264 点である。Figure 5 は $r = 10$ mm での 6 極磁場の z 軸方向の分布である。比較のため、式 (1) による評価結果も示した。磁場が z 方向に大きく変化するフリンジ領域において両者の分布の違いは顕著である。半径 $r = 10$ cm での 4 極磁場から 16 極磁場までの積分値を Table 1 にまとめる。最低次の非線形磁場である 6 極磁場に関しては、式 (2) による評価結果の方がピーク値は大きい、その積分値は小さい。また、高次の磁場になるほど両者の積分値の差は大きくなる傾向が見られる。

3. 力学口径の評価

3.1 SAD によるラティスマデリング

前章で求めた展開係数を用いて SAD 上に B1 及び B2 電磁石を多重極磁場スライスの集合としてモデリ

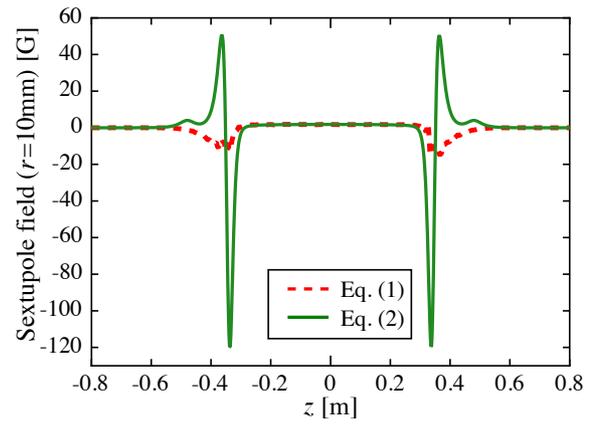


Figure 5: Sextupole field profile at $r = 10$ mm.

Table 1: Integrated Multipole Field Strength at $r = 10$ cm Normalized by That of 2-pole Field

	Eq. (1)	Eq. (2)
4-pole	-1.69×10^{-5}	-1.85×10^{-5}
6-pole	1.06×10^{-4}	8.82×10^{-5}
8-pole	4.80×10^{-6}	4.30×10^{-6}
10-pole	-2.39×10^{-5}	-1.69×10^{-5}
12-pole	2.05×10^{-13}	3.51×10^{-7}
14-pole	-1.36×10^{-12}	-9.87×10^{-6}
16-pole	7.68×10^{-21}	4.14×10^{-9}

ングした。基本セルのビーム光学及び 2 極磁場の分布を Fig. 6 に示す。ここでは各スライスは 16 極までの多重極磁場をもつ。また各スライスの両端には Hard Edge Maxwellian Fringe^[8] に加え、2 極と 4 極磁場の Linear Soft-edge Fringe^[7] の影響が考慮されている。また、フリンジ長はスライスの厚みとした。これは磁場の z 方向の分布を折れ線近似したことに相当する。垂直方向チューンの色収差曲線とスライスの厚みの関係を Fig. 7 に示す。この結果と計算負荷を鑑み、以下ではスライスの厚みを 3 cm とする。

3.2 力学口径

力学口径は粒子トラッキングにより評価した。PDR を安定に 2000 周できた粒子の初期の振幅を力学口径とする。ここでは純粋に力学口径を評価するために物理口径は考慮しない。粒子の初期条件は水平方向と垂直方向に同じ初期振幅を与え、各ベータatron振動の初期位相はゼロとした。また、シンクロトロン放射に伴う減衰、拡散は考慮しない。PDR には基本セルに収束型及び発散型 6 極電磁石が各 1 台設置されている。これらは全てのセルで共通電源となっている。これら 2 つの独立な 6 極電磁石と直線部に設置された独立な 12 台の合計 14 台の 6 極電磁石に対して Down-hill Simplex 法^[9] を用いて力学口径を最適化した。

最適化前後の力学口径を Fig. 8 に示す。図中の "Ideal" は Fig. 1 に示した矩形近似の偏向電磁石を用いた理想的なモデルを表す。力学口径は磁場の非線形により劣化するものの、依然、入射ビームよりは広い。Figure 9 に

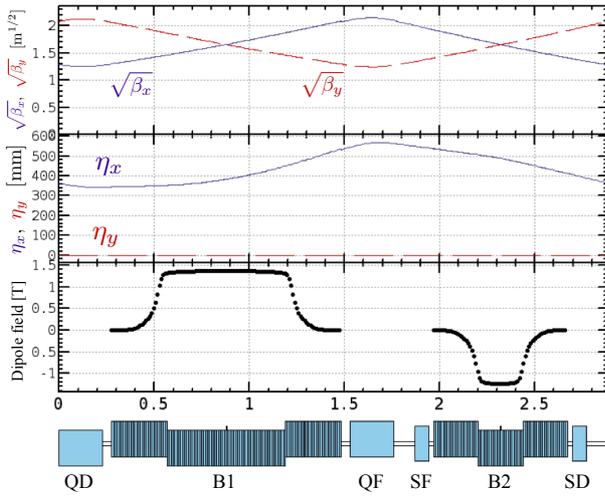


Figure 6: Cell optics with the multipole slice model.

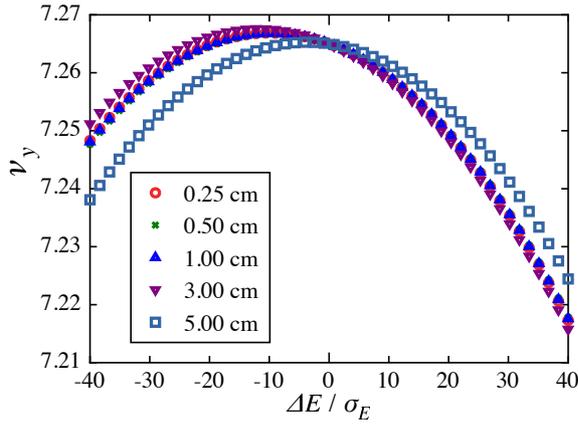


Figure 7: Vertical tune chromaticity of the PDR lattice and thickness of the multipole slices.

は最適化後の PDR に対する Frequency Map Analysis^[10]の結果を示す。拡散係数 D は

$$D = \log_{10} \sqrt{|\nu_{x2} - \nu_{x1}|^2 + |\nu_{y2} - \nu_{y1}|^2}, \quad (6)$$

により算出した。ここで $\nu_{x1,y1}$ は最初の 1000 周のトラッキングにより評価したチューン、 $\nu_{x2,y2}$ はそれに続く 1000 周で評価したチューンである。トラッキングは設計運動量の粒子に対して行い、シンクロトロン運動は無視した。Figure 9(a) の $(x/\sigma_x, y/\sigma_y) \sim (40, 25)$ 付近の拡散係数が比較的大きい領域は主に Fig. 9(b) に示されている $\nu_x - \nu_y = 1$ の差共鳴付近の領域に対応していることが分かっている。

力学口径を最も制限している多重極磁場を調べるために、各多重極磁場を個別にラティスに設定し力学口径を評価した。シミュレーション結果を Fig. 10 にまとめる。非線形磁場が 6 極磁場のみの場合、力学口径は設計運動量付近を除いて理想的なラティスと比べてほぼ遜色ない。6 極成分に関しては、PDR に設置された 6 極電磁石の調整により補正が可能であることを意味している。また、次の次数の非線形磁場である 8 極磁場の影響は

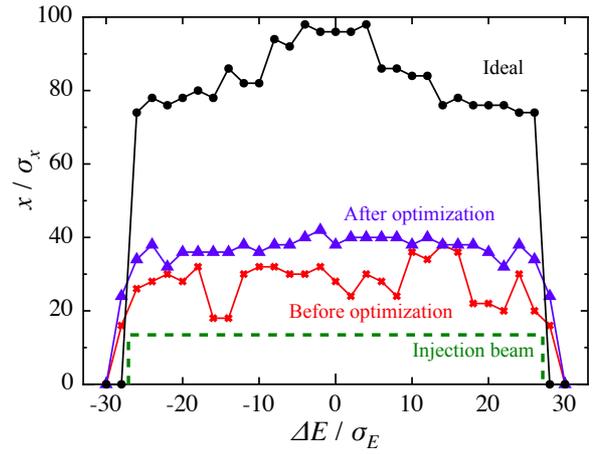


Figure 8: Dynamic aperture before and after optimization, where $\sigma_x = 0.87$ mm and $\sigma_E = 5.5 \times 10^{-2}\%$.

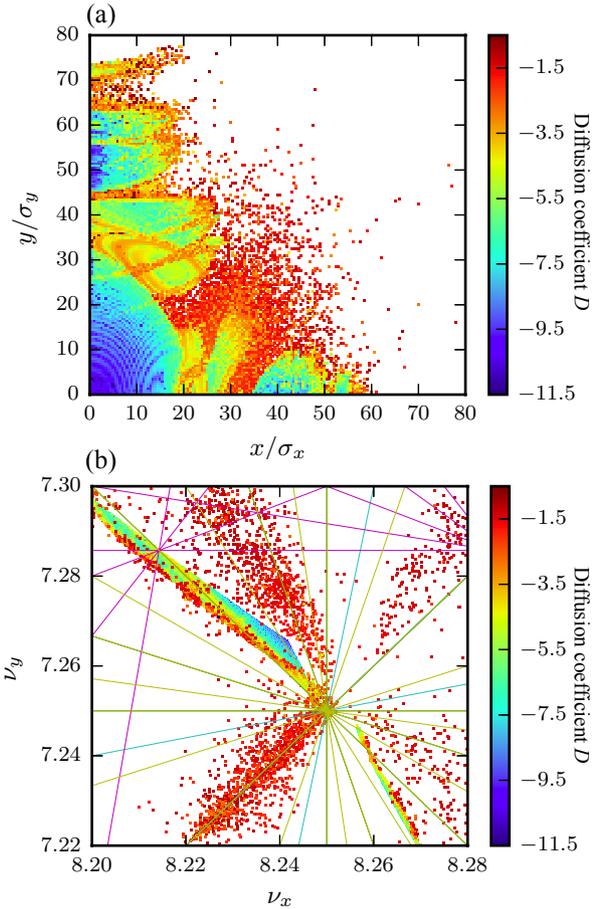


Figure 9: Frequency map analysis to the PDR lattice, (a) diffusion coefficient on real space and (b) on tune space. The operation point is $(\nu_x, \nu_y) = (8.240, 7.265)$, and $\sigma_x = \sigma_y = 0.87$ mm.

ほぼ見られない。これは Table 1 に示した様に、8 極磁場は比較的小さいためだと考えられる。なぜなら、完全

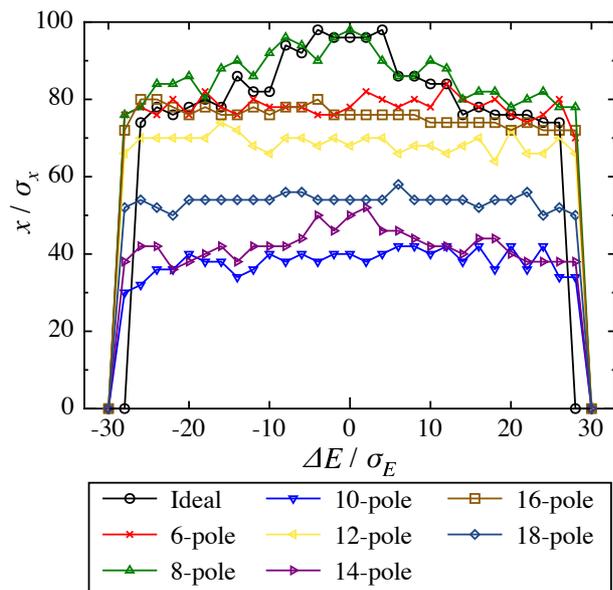


Figure 10: Dynamic aperture and nonlinear multipoles.

な2極磁場がもつ対称性を満たす磁場は n を自然数として $2(2n+1)$ 極磁場であり、8極磁場はこの対称性を満足しないからである。そして、力学口径に最も影響のある非線形磁場はこの対称性を満足し、6極の次に次数の低い10極磁場であることが分かる。PDRには10極磁場を調整するハードウェアは存在しないため、現状でこの劣化を直接的に救う手立てはない。しかしながら、Fig. 8に示した様に6極電磁石の調整により入射ビームより広い力学口径を得ることは可能である。ラティスにマシンエラー（設置誤差や磁場誤差）が存在する場合の力学口径に関しては今後の検討課題である。

4. まとめと今後

SuperKEKB陽電子ダンピングリングの偏向電磁石のモデリング及び、力学口径の評価に関して報告した。OPERA-3D/TOSCAにより計算した偏向電磁石の磁場に多重極展開を施すことで、各多重極磁場成分を評価した。特に磁場が軸方向に変化するフリッジ領域において二次元の多項式回帰による結果は非線形磁場を正確に評価できないことを確認した。

ビーム光学や力学口径を評価するために、偏向電磁石を多重極磁場スライスの集合としてSAD上にモデリングした。PDRの力学口径を制限しているのは偏向電磁石の非線形磁場であることを確認した。また、各多重極磁場を個別に導入した系統的なシミュレーションにより、最も影響の大きい多重極磁場は10極磁場であることが判明した。

今回の調査により、マシンエラーが無ければ6極電磁石の調整により入射ビームより広い力学口径を確保できることが分かった。今後はラティスのマシンエラーがエミッタンスや力学口径に与える影響を調査する予定である。また、チューンスキャンを行うことでより最適な動作点がないかを調べる必要がある。モデリングの改善項目としては、フリッジ領域以外のスライスの厚みを厚くすることで計算負荷を削減するなどが挙げられる。

参考文献

- [1] Y. Ohnishi *et al.*, Prog. Theor. Exp. Phys. 2013 03A011 (2013).
- [2] C. P. Raimondi, 2nd SuperB Workshop, Frascati, Italy, Mar. 16-18, 2006.
- [3] M. Kikuchi, Nucl. Inst. Meth. A 556, 13 (2006).
- [4] OPERA-3D is the code developed by Cobham Technical Services, UK.
<http://operafea.com/>
- [5] J. G. Wang, PRSTAB 9, 012401 (2006).
- [6] A. Morita *et al.*, in Proc. of IPAC2011, San Sebastián (Spain, 2011) pp. 3690.
- [7] K. Oide, Nucl. Inst. Meth. A 276, 427 (1989).
<http://acc-physics.kek.jp/SAD/>
- [8] E. Forest *et al.*, Nucl. Inst. Meth. A 269, 474 (1988).
- [9] J. A. Nelder and R. Mead, The Computer Journal 7, 308 (1965).
- [10] L. Nadolski and J. Laskar, Phys. Rev. ST Accel. Beams 6, 114801 (2003).