DEVELOPMENT OF THREE-DIMENSIONAL WAKE FIELD ANALYSIS PROGRAM BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

K.MIYATA

Energy Research Laboratory,Hitachi,Ltd.

Abstract

A three-dimensional wake field analysis program was developed by the use of boundary element method for analysis of electron instabilities under heavy beam loading. Elementary differential equations are transient wave equations of electric hertz vectors. The accuracy of this program is within 5% in a pill-box cavity model.

1.まえがき

大電流電子加速器を設計あるいは運転する場合、電子とそれを取り囲む導体壁との電磁的相互作用によるウェイク場を考慮する必要がある。ウェイク場によって、自己のバンチの後の部分、あるいは後続のバンチに振動を与え、ある限界を超えると電子ビームは不安定化して、ビーム損失を招く。この場合、ウェイク場はビーム軸に対して垂直な横方向に多大な影響を及ぼす。

横方向のウェイク場の影響を解析する場合、従来はバンチの横方向への微小変位を仮定して、軸回りにモード展開する手法が採られている。例えば、T.WeilandのTBCI [1]やG.AharonianのDBCI [2]がそれである。この手法は、真の解を得るために多くのモード計算をする必要があり、バンチの横方向の変位が大きい場合の非線形効果を取り込むことができない。従って３次元解析コードが望まれる。

３次元解析コードは、陳による WELL [3]が最初であるが、これは特定の形状をした空胴に限定されている。これに対し、最近、R.Klatt、T.Weilandらによって任意形状の空胴で解析できるコード 3D-BCI [4]が開発され、現在、加速器のルーチンデザインに使われ始めているが、計算時間及び記憶容量が膨大であり、入出力データの取り扱いも複雑であるため、一般に普及するのは数年後と見られている。[4]

われわれは、入出力データの削減及び計算時間の短縮化を図るため、ここ６、７年で急速に発展してきた有力な数値解析手法である境界要素法を採用し、任意形状の空胴で解析可能な３次元ウェイク場解析コードの一部をこのほど作成したので、ここに報告する。

2.境界要素法の基礎式

本解析コードでは、電磁場を記述する電気型ヘルツベクトルに関する３次元波

動方程式を境界要素法を用いて解いている。

初期の場が0で、電子ビームによるもの以外の場の流入が無い場合、解析空間(真空)内の電場E及び磁場Bは、電気型ヘルツベクトルΠを用いて、

$$\mathbb{E} = \nabla(\mathrm{div}\,\Pi) - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial T^2} \quad \text{-------------------------------- (1)}$$

$$\mathbb{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial T}(\mathrm{rot}\,\Pi) \quad \text{-------------------------------- (2)}$$

と表わせ、Πは次の波動方程式に従う。

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial T^2}\right)\Pi = -Z_0\int_{-\infty}^{T}\mathbb{J}\,dT' \quad \text{------------------------- (3)}$$

ここに$\mathbb{J}$はビームの電流密度ベクトル、Z_0は真空の特性インピーダンス(376.7 Ω)、Tは T=ct (c:光速度、t:時間)である。

式(3)を境界要素法で解くときの基礎となる境界積分方程式は、

$$\beta_i \Pi(\mathbb{r}_i, T) = \left[\left\langle \frac{1}{R}\frac{\partial \Pi}{\partial n} + \frac{R'}{R^2}\frac{\partial \Pi}{\partial T} + \frac{R'}{R^3}\Pi \right\rangle_\Gamma - \left\langle \frac{\mathbb{P}}{R}\right\rangle_\Omega\right]_{T'=T-R} \quad \text{----- (4)}$$

である。ここに、

$\langle\quad\rangle_\Gamma$: 解析空間Ωを取り囲む境界面Γ上の面積分

$\langle\quad\rangle_\Omega$: 解析空間Ω内の空間積分

$R = |\mathbb{r} - \mathbb{r}i|$ ($\mathbb{r}$: 積分変数)

$R' = (\mathbb{r} - \mathbb{r}i)\cdot\mathbb{n}$ ($\mathbb{n}$: 境界面Γ上の点$\mathbb{r}$における単位外向き法線ベクトル)

$\mathbb{P} = -Z_0\int_{-\infty}^{T}\mathbb{J}(\mathbb{r}, T')\,dT'$

$\frac{\partial}{\partial n}$: 境界面Γ上の点$\mathbb{r}$における$\mathbb{n}$方向の微分

βi : 点$\mathbb{r}i$が空間Ωを見込む立体角

である。

また、境界条件は次のとおりである。

(1)完全導体面

$$\Pi = (n\cdot\Pi)n \quad \text{-------------------- (5)}$$

$$n\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial n} = 0 \quad \text{-------------------- (6)}$$

(2)開口面(ビーム入口部)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = 2\frac{\partial \Pi_b}{\partial T} - \frac{\partial \Pi}{\partial T} \quad \text{--------------- (7)}$$

(3)開口面(その他)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = -\frac{\partial \Pi}{\partial T} \quad \text{------------------- (8)}$$

ただし、Π_bは自由空間において電子ビームが誘起する電磁場のヘルツベクトルである。

3.プログラムの検証

作成したプログラムの妥当性を検証する方法としては、厳密解と比較するのが最も良い。ここでは厳密解が求まる解析体系のひとつとして、完全導体壁で囲まれた円筒空胴(Pill− box Cavity)を解析対象とした。

円筒空胴の長さL＝10cm、半径R＝5cmのときの本解析コードにおけるメッシュ分割図を図１に示す。円筒空胴の中心軸上を通過する線状電子ビームの線電荷密度をガウス分布とし、標準偏差σ＝ 2.5cm、ピーク電流$\hat{I}$＝１Ａのときの本解析コードにおける数値解Ａ及び厳密解Ｂを図２に示す。要素分割数432(半径方向6分割、周方向16分割、軸方向16分割)のこの体系において、図２が示すように、本解析コードにおける数値解の最大誤差は最大振幅に対して５％以内におさまっている。ちなみに、図２の数値解の計算時間は当社製大型計算機Ｍ200-Ｈで約15分である。

4.まとめ

電子加速器における電子の不安定性を解析するために、３次元任意形状の空胴内のウェイク場を解析するコードの一部を作成した。電磁場を記述する電気型ヘルツベクトルに関する３次元波動方程式の解析を、境界要素法により、２次元の境界面上の解析に置き換えている。円筒形空胴モデルにおいて、軸方向ウェイクポテンシャルの数値解の厳密解に対する最大誤差は、最大振幅に対して５％以内におさまっている。

参考文献

(1) T.Weiland : DESY M-83-17 (1983)

(2) G.Aharonian,et al. : Nucl.Instru.Methods 212 (1983) 23

(3) Y.Chin : KEK Preprint 84-4 (1984)

(4) T.Weiland : IEEE Trans.Nucl.Sci.,NS-32, No.5 (1985) 2738

(5) T.Weiland,et al. : Particle Accelerators Vol.11 (1981) 143

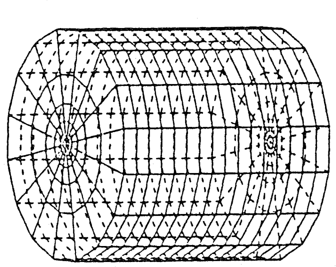

図1 メッシュ分割図

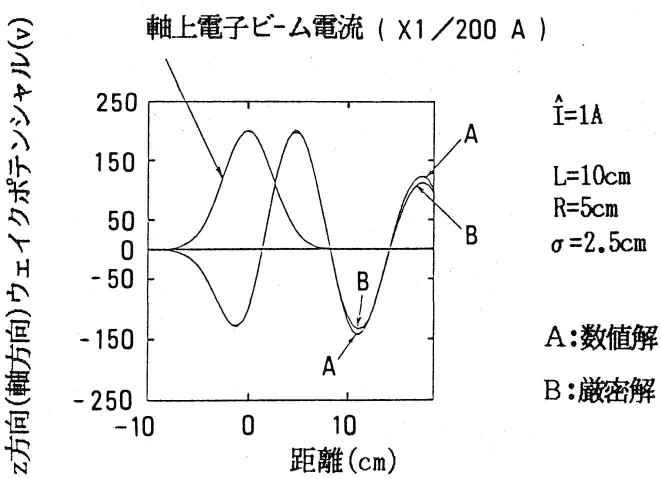

図2 ガウス分布をした線状ビームによる
z方向(軸方向)ウェイクポテンシャルの
数値解と厳密解との比較