

## Analytical solution of phase space evolution of electrons in a SASE FEL

N.Nishimori\*

, Free-Electron Laser Laboratory, Japan Atomic Energy Research Institute  
Tokai-mura, Ibaraki 319-1195 Japan

### Abstract

I present an analytical description of the phase space evolution of electrons in a self-amplified spontaneous emission (SASE) Free Electron Laser (FEL) operating in the linear regime before saturation, by solving the one dimensional FEL equation together with the solution of the cubic equation, which represents the evolution of the FEL power. The optimum bunching of electrons on the scale of the radiation wavelength is analytically derived from the solution of the phase space evolution. The well known saturation condition  $\rho N_w \approx 1$  is derived from the optimum bunching.

## SASE-FELにおける電子位相空間分布の時間発展の解析解

### 1. はじめに

Self Amplified Spontaneous Emission (SASE) 自由電子レーザー (FEL) は、共振器ミラーの使えない、X線領域でのレーザー生成を目的として主に開発されている [1]。SASE FEL の理論的な研究によると、発振プロセスはおおまかに3段階にわけられる [2]。自発放射光が支配的な不活性領域 (lethargy regime) と呼ばれる第1段階では、電子が通過したアンジュレーター周期数 ( $N_w$ ) の逆数に比例して放射光のスペクトル幅が狭くなる。これにより、アンジュレーター放射光の位相が揃う。電子は位相の揃った光と相互作用し、光波長サイズ毎にバンチ圧縮される。光との相互作用で電子バンチはエネルギーを失い光を増幅する。この第2段階において、放射光パワーはアンジュレーター周期数と共に指数関数的に増幅する (Exponential growth regime)。電子をバンチ圧縮しすぎると、電子はオーバーバンチされ第3段階である飽和領域 (Saturation regime) に達する。

指数関数的増幅領域での FEL 光の成長は cubic 方程式の解として求められ、ゲイン長 (光強度が e 倍になる距離) が  $1/(4\pi\sqrt{3}\rho)$  になること等、実験をよく再現する。ここで、

$$\rho = \frac{1}{\gamma_0} [ea_w F \sqrt{n_e/(\epsilon_0 m)}/(4ck_w)]^{2/3} \quad (1)$$

は FEL パラメーター [3]。一方、光の成長と対をなす電子バンチングの時間発展については、数値計算がなされているのみである [4]。

本研究の目的は、SASE FEL 指数関数的増幅領域での、電子の位相空間分布の時間発展を 1次元 FEL 方程式を用いて解析的に求めることである。変数の定義と 1次元 FEL 方程式を 2章で示し、解析解を 3章で求める。電子が最も強くバンチングされる条件を 4章で求め、飽和条件  $\rho N_w \approx 1$  を導く。

### 2. 1次元 FEL 方程式と変数

Brau や Colson の教科書 [5, 6] では、光がアンジュレーター周期数  $N_w$  を通過する時間を 1 と定義している。一方、Bonifacio は、アンジュレーター周期数  $1/(4\pi\rho)$  を通過する時間を 1 と定義している [3]。このような変数の定義に応じて、FEL 方程式は異なった外見を持つ。ここでは、本報告で用いる変数を定義する。無次元時間を  $\tau = ct/\lambda_w$  とし、光がアンジュレーター 1 周期を通過する時間を 1 とする。無次元電場は位相  $\phi(\zeta, \tau)$  を使って次のように表される。

$$a(\zeta, \tau) = \frac{2\pi e a_w \lambda_w F}{\gamma_0^2 m c^2} E(\zeta, \tau) \exp[i\phi(\zeta, \tau)], \quad (2)$$

これは、Colson の無次元電場を  $2N_w^2$  で割ったものに等しい。  $E(\zeta, \tau)$  は rms 光電場である。  $i$  番目の電子の無次元エネルギーは  $\mu_i(\tau) = 4\pi[\gamma_i(t) - \gamma_0]/\gamma_0$ 、位置は  $\zeta_i(\tau) = [z_i(t) - ct]/\lambda$ 、位相は  $\psi_i(\tau) = (k_w + k)z_i(t) - \omega t$  である。共鳴波長は  $\lambda = \lambda_w(1 + a_w^2)/(2\gamma_0^2)$  である。

上定義に基づくと、電場や電子の成長を表す 1次元 FEL 方程式は次のように求められる [6]。

$$\frac{\partial a(\zeta, \tau)}{\partial \tau} = -(4\pi\rho)^3 \langle \exp[-i\psi_i(\tau)] \rangle_{\zeta_i(\tau)=\zeta}, \quad (3)$$

$$\frac{d\mu_i(\tau)}{d\tau} = a[\zeta_i(\tau), \tau] \exp[i\psi_i(\tau)] + \text{c.c.}, \quad (4)$$

$$\frac{d\psi_i(\tau)}{d\tau} = \mu_i(\tau). \quad (5)$$

電子ビームの形状は長方形とし、 $\rho$  一定の場合を考える。

### 3. 電子の位相空間分布の成長

FEL の発振プロセスの第1段階において、空間・時間的に一様な電場が形成される [7, 8]。初期一様電場・位相  $|a(0)|e^{i\phi(0)}$  を持つ電場の成長は cubic 方程

\* E-mail: nisi@milford.tokai.jaeri.go.jp

式の解で表される [3, 6]。時刻  $\tau$  の時の位置  $\zeta < -\tau$  の電場は次のように、指数関数的増加項、指数関数的減少項、振動項からなる。

$$a(\tau) = [|a(0)|e^{i\phi(0)}/3][\exp(4\pi\rho\tau e^{i\pi/6}) + \exp(-4\pi\rho\tau e^{-i\pi/6}) + \exp(4\pi\rho\tau e^{-i\pi/2})]. \quad (6)$$

$i$  番目の電子が、時刻  $\tau'$  に微小時間  $\delta\tau'$  の間に受けるエネルギー変化は式 (4)、(6) を使って  $\delta\mu_i(\tau') = [a(\tau')e^{i\psi_i(\tau')} + \text{c.c.}]\delta\tau'$  となる。飽和以前の FEL 電場強度は非常に小さいため、電子の位相は初期値からほとんど変化せず、 $\psi_i(\tau') \approx \psi_i(0)$  という近似が使える。この近似を使うと、エネルギー変化は  $\delta\mu_i(\tau') \approx [a(\tau')e^{i\psi_i(0)} + \text{c.c.}]\delta\tau'$  となる。 $i$  番目の電子のトータルのエネルギー変化  $\mu_i(\tau)$  は、時刻 0 から  $\tau$  までのエネルギー変化全てを足したものとなり、次の様に記述できる。

$$\mu_i(\tau) = \int_0^\tau \{a(\tau') \exp[i\psi_i(0)] + \text{c.c.}\} d\tau'. \quad (7)$$

式 (7) に式 (6) を代入して積分すると次式となる。

$$\begin{aligned} \mu_i(\tau) = \{2|a(0)|/[3(4\pi\rho)]\} \times \\ \{e^{2\pi\sqrt{3}\rho\tau} \cos[\psi_i(0) + \phi(0) + 2\pi\rho\tau - \pi/6] \\ - e^{-2\pi\sqrt{3}\rho\tau} \cos[\psi_i(0) + \phi(0) + 2\pi\rho\tau + \pi/6] \\ + \cos[\psi_i(0) + \phi(0) - 4\pi\rho\tau + \pi/2]\}. \quad (8) \end{aligned}$$

式 (8) は、指数関数的増加項、指数関数的減少項、振動項を持つ。

$i$  番目の電子が、時刻  $\tau'$  に微小時間  $\delta\tau'$  の間に受ける位相変化は、式 (5) を使って  $\delta\psi_i(\tau') = \mu_i(\tau')\delta\tau'$  となる。トータルの位相変化は時刻 0 から  $\tau$  までの合計であり、次のように表される。

$$\Delta\psi_i(\tau) = \psi_i(\tau) - \psi_i(0) = \int_0^\tau \mu_i(\tau') d\tau'. \quad (9)$$

式 (9) に式 (8) を代入して積分すると次式となる。

$$\begin{aligned} \Delta\psi_i(\tau) = \{2|a(0)|/[3(4\pi\rho)^2]\} \times \\ \{e^{2\pi\sqrt{3}\rho\tau} \cos[\psi_i(0) + \phi(0) + 2\pi\rho\tau - \pi/3] \\ + e^{-2\pi\sqrt{3}\rho\tau} \cos[\psi_i(0) + \phi(0) + 2\pi\rho\tau + \pi/3] \\ + \cos[\psi_i(0) + \phi(0) - 4\pi\rho\tau + \pi]\}. \quad (10) \end{aligned}$$

式 (8) と (10) を使って、

$$X = \Delta\psi_i(\tau) / \{|a(0)|e^{2\pi\sqrt{3}\rho\tau} / [3(4\pi\rho)^2]\} \quad (11)$$

$$Y = \mu_i(\tau) / \{|a(0)|e^{2\pi\sqrt{3}\rho\tau} / [3(4\pi\rho)]\} \quad (12)$$

からなる位相空間上の電子分布を求め、図 1 に示す。電子の位相空間分布は  $4\pi\rho\tau < 4$  で徐々に変化し、 $4\pi\rho\tau \geq 4$  ではほぼ一定になる。

時刻  $\tau$  の電場ゲインは式 (10) を式 (3) に代入して、次のように求まる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(\tau)}{\partial \tau} = \frac{4\pi\rho|a(0)|e^{i\phi(0)}}{3} [\exp(4\pi\rho\tau e^{i\pi/6} + i\pi/6) \\ - \exp(-4\pi\rho\tau e^{-i\pi/6} - i\pi/6) \\ + \exp(4\pi\rho\tau e^{-i\pi/2} - i\pi/2)]. \quad (13) \end{aligned}$$

この式は  $2|a(0)|e^{2\pi\sqrt{3}\rho\tau} / [3(4\pi\rho)^2] \ll 1$  の時に成り立ち、式 (6) の時間微分  $\partial a(\tau) / \partial \tau$  と全く同じである。

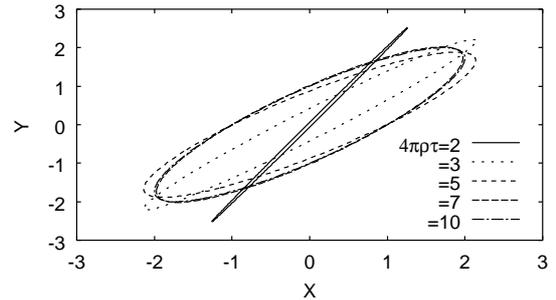


図 1:  $4\pi\rho\tau = 2, 3, 5, 7, 10$  の時の  $X$  [式 (11)],  $Y$  [式 (12)] 位相空間での電子分布。電子マイクロバンチ中心位置は  $4\pi\rho\tau \geq 4$  の時  $(X, Y) = (0, -1)$ 。

#### 4. 高ゲイン領域での電場、電子の成長

$4\pi\rho\tau \geq 4$  を高ゲイン領域と定義する。この領域では、電場、電子のエネルギー・位相変化は指数関数的増加項のみで漸近的に表される。電場は位相  $\phi(\tau) = 2\pi\rho\tau + \phi(0)$  を使って次のように記述される。

$$a(\tau) \sim [|a(0)|/3]e^{2\pi\sqrt{3}\rho\tau} e^{i\phi(\tau)} \quad (14)$$

$i$  番目の電子のエネルギー・位相変化は次の通り。

$$\mu_i(\tau) \sim \{2|a(0)|e^{2\pi\sqrt{3}\rho\tau} / [3(4\pi\rho)]\} \times \cos[\psi_i(0) + \phi(\tau) - \pi/6], \quad (15)$$

$$\Delta\psi_i(\tau) \sim \{2|a(0)|e^{2\pi\sqrt{3}\rho\tau} / [3(4\pi\rho)^2]\} \times \cos[\psi_i(0) + \phi(\tau) - \pi/3]. \quad (16)$$

$X, Y$  位相空間での電子の分布は  $X^2 + Y^2 - \sqrt{3}XY = 1$  という楕円で表される。

電子マイクロバンチ中心座標は  $\Delta\psi_i(\tau) = 0$  という条件を満たす。各電子の初期位置が  $\zeta_{i+1}(0) < \zeta_i(0)$  の場合、バンチ中心の両隣の電子の位相変化は  $\Delta\psi_{i+1}(\tau) > 0$ ,  $\Delta\psi_{i-1}(\tau) < 0$  となる。従って、マイクロバンチ中心は、 $\psi_i(0) + \phi(\tau) - \pi/3 = \pi/2$  を満たす位相を持つ電子であり、高ゲイン領域でのバンチ中心の座標は  $(X, Y) = (0, -1)$  である。

電子分布の時間発展を  $\Delta\psi_i(\tau)$ ,  $\mu_i(\tau)$  位相空間で調べたものを図 2 に示す。実線、点線、鎖線はそれぞれ  $4\pi\rho\tau = 10, 11, 12$  の時の分布を示す。4 つの異なる初期位相を持つ電子の時間発展も示している。楕

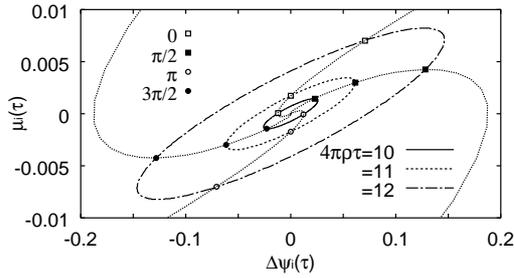


図 2:  $4\pi\rho\tau = 10$  (実線), 11 (点線), 12 (鎖線) の時の  $\Delta\psi_i(\tau)$ 、 $\mu_i(\tau)$  位相空間での電子分布。4つの異なる初期位相を持つ電子の位相空間内での成長を、(初期位相:0)、 $(\pi/2)$ 、 $(\pi)$ 、 $(3\pi/2)$  で表している。

円形の位相分布は時間と共に時計回りで回転しながら、その大きさが指数関数的に増加する。それぞれ位相  $\phi(\tau)$  と電場の大きさ  $|a(\tau)|$  の成長を反映している。各時刻において、 $\Delta\psi_i(\tau) = 0$  かつ  $\mu_i(\tau) < 0$  となる点が電子マイクロバンチ中心である。バンチ中心のエネルギーの指数関数的な減少は、電場エネルギーの指数関数的な増加に対応する。

高ゲイン領域での電場ゲインは、式 (13) から  $\partial a(\tau)/\partial\tau = [|a(0)|e^{i\phi(0)}/3][\exp(4\pi\rho\tau e^{i\pi/6} + i\pi/6)]$  となるが、これは  $|\Delta\psi_i(\tau)| \ll 1$  の場合である。飽和近くでは、電子の位相変化が大きく  $|\Delta\psi_i(\tau)| > 1$  となるため、式 (13) は使えない。ただ、式 (14) を式 (16) に代入して得られる振幅ゲインの式は使える。

$$\partial|a(\tau)|/\partial\tau = -(4\pi\rho)^3 \langle \cos\{\psi_i(0) + \phi(\tau) + 2[|a(\tau)|/(4\pi\rho)^2] \cos[\psi_i(0) + \phi(\tau) - \pi/3]\} \rangle_{\zeta_i(\tau)=\zeta}. \quad (17)$$

$|a(\tau)|/(4\pi\rho)^2$  の関数として式 (17) を計算すると、 $|a(\tau_{opt})|/(4\pi\rho)^2 = 0.92$  の時に最大値  $(4\pi\rho)^3/2$  となることがわかる。計算では、 $\psi_i(0) + \phi(\tau)$  の値が  $2\pi$  に渡って一様であることを利用する。 $\tau_{opt}$  は電子が最適にバンチされる時刻を表す。最適バンチ後、オーバーバンチによりゲインは減少する [7]。最適にバンチされた時の電場振幅は次のようになる。

$$|a(\tau_{opt})| = [|a(0)|/3]e^{2\pi\sqrt{3}\tau_{opt}} = 0.92(4\pi\rho)^2 \quad (18)$$

これは、数値計算で求められた SASE ピーク電場 [3] の 80% の値である。

電子が最適にバンチされるアンジュレーター周期数  $N_w$  は式 (18) から求められる。初期電場強度  $|a(0)|$  は式 (3) と共鳴波長単位での平均値  $\langle \cos[\psi_i(\tau)] \rangle_{\zeta_i(\tau)=\zeta}$  の標準偏差を使って導くことができる。標準偏差は単位体積  $\lambda\Sigma$  に含まれている電子の数  $N_e = n_e\lambda\Sigma$  を使って  $1/(2N_e)$  と表される [9]。ここで、 $\Sigma = \lambda[Z_R + (N_w\lambda_w)^2/(12Z_R)]/2$  はアンジュレーター長に渡って平均化した実効的な放射光電場の面積、 $Z_R$  は Rayleigh 長 [5]。式 (1) より、電子ビーム密度は  $n_e = (16\rho^3\gamma_0^3\epsilon_0 mc^2 k_w^2)/(e^2 a_w^2 F^2)$  となるので、初期振幅は  $|a(0)| = P\rho^{3/2}$  と求まる。ここで、

$$P = 2.97 \times 10^{-5} F a_w \sqrt{\gamma_0 \lambda / (2\Sigma)} (1 + a_w^2)^{-1}. \quad (19)$$

$|a(0)| = P\rho^{3/2}$  を式 (18) に代入すると、

$$2\pi\sqrt{3}\rho N_w = 6.1 - \ln(P) + (1/2)\ln(\rho) \quad (20)$$

となる。 $\rho$  が 0.001 から 0.01 の範囲にあることと、 $P$  がほぼ全てのコンプトン FEL [11] において  $2 \times 10^{-5}$  から  $3 \times 10^{-4}$  の範囲にあることを考慮すると、 $\rho N_w$  は 0.99 から 1.3 の間にある。これは、よく知られた SASE FEL の飽和条件  $\rho N_w \approx 1$  [7] とほぼ同じである。

## 5. まとめ

SASE FEL における電子の位相空間分布成長の解析解を、1次元 FEL 方程式を使って求めた。電場成長を表す cubic 方程式の解と同様、電子の成長も指数関数的増加、指数関数的減少、振動項からなる解で表される。 $4\pi\rho\tau > 4$  で定義される高ゲイン領域においては、 $(\Delta\psi_i(\tau), \mu_i(\tau))$  の位相空間上で、波長単位の電子マイクロバンチは楕円曲線上に分布する。楕円は時計回りに回転しながら指数関数的にその大きさが増加する。電子マイクロバンチの中心は  $\Delta\psi_i(\tau) = 0$ 、 $\mu_i(\tau) < 0$  に位置し、楕円の大きさの指数関数的な増加は電場エネルギーの指数関数的な増加に対応する。

本研究で、東北大学 浜広幸 教授、KEK 平松成範 教授 に御助言を頂きました。ここに感謝致します。

## 参考文献

- [1] 新竹積、他、in *Proceedings of the 27th Linear Accelerator Meeting in Japan, Tokai, Japan, 2003*, pp. 33-35, 2003.
- [2] 磯山悟朗、加藤龍好、“第 4 世代光源 SASE”，放射光, pp.163-174, 2001.
- [3] R. Bonifacio et al., *Riv. Nuovo Cimento* **13**, 9 (1990).
- [4] E.L. Saldin, E.A. Schneidmiller and M.V. Yurkov, in *The Physics of Free Electron Lasers*, (Springer, Berlin, 2000), pp. 48-54.
- [5] C.A. Brau, *Free-Electron Lasers* (Academic, San Diego, 1990).
- [6] W.B. Colson, in *Laser Handbook*, edited by W.B. Colson, C. Pellegrini, and A. Renieri (North Holland, Amsterdam, 1990), Vol.6, pp. 115-193.
- [7] Kwang-Je Kim, *PRL* **57**, 1871 (1986); *NIM A* **250**, 396 (1986); Kwang-Je Kim and Ming Xie, *NIM A* **331**, 359 (1993);
- [8] N. Nishimori, R. Hajima, R. Nagai and E.J. Minehara, *NIM A* **507**, 79 (2003).
- [9] C. Penman and B.W.J. McNeil, *Opt. Comm.* **90**, 82 (1992).
- [10] N. Nishimori, R. Hajima, R. Nagai, and E.J. Minehara, *PRL* **86**, 5707 (2001).
- [11] W.B. Colson, in *Proceedings of the 23rd International Free Electron Laser Conference (FEL2001)*, Darmstadt, Germany, 2001 (Elsevier, Amsterdam, 2002), p.II-67.