

行列計算を用いたコヒーレント放射光効果の解析

羽島 良一¹

日本原子力研究所

〒319-1195 茨城県那珂郡東海村白方白根 2-4

概要

電子バンチが偏向軌道を通る時に発生するコヒーレント・シンクロトロン放射光 (CSR) は、バンチが短く、バンチ電荷が大きいほど強くなる。個々の電子が放出する CSR パワーはバンチ内の位置に依存し様でないため、バンチ内に不均一なエネルギー分散を生じ、これがエミッタンスの増大をもたらす。ERL 周回軌道の設計では、この CSR 効果を含んだビーム運動の解析が必要とされる。本稿では、ビーム輸送系の設計に古くから用いられてきた行列計算を拡張し、CSR 効果を含んだビーム運動の解析を行う。これにより、エミッタンス増大を最小にするような ERL 周回軌道の設計が迅速に行える。

1. はじめに

電子が偏向軌道を通る時に発生するコヒーレント・シンクロトロン放射光 (coherent synchrotron radiation; CSR) による、電子ビームエミッタンスの増大は、X 線自由電子レーザー (XFEL) のバンチ圧縮器、エネルギー回収型リニアック (ERL) 周回軌道の設計において考慮すべき重要な課題である。1995 年の問題提起 [1] 以来、さまざまな実験 [2]、解析 [3] が行われている。

図 1 は、CSR によるエミッタンス増大の原理を示したものである。CSR によって偏向軌道中で生じる電子エネルギー変化は、電子の縦方向位置に依存し、バンチ内で不均一な値をとる。その結果、偏向磁石通過後にバンチスライス毎に異なる変位を受け、エミッタンスの増大をもたらす様子が示されている。

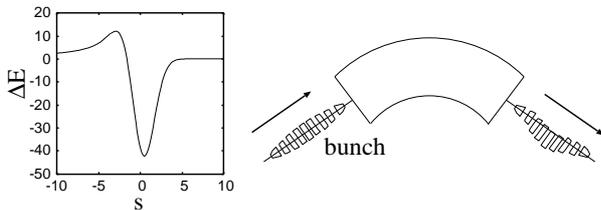


図 1: CSR によってバンチ内に生じる不均一なエネルギー変化がエミッタンスの増大をもたらす。

2. 行列計算による CSR 効果の解析

CSR による電子ビームエミッタンス増大は、これまで、粒子追跡計算コードを用いた大がかりな計算に頼ってきた。しかしながら、ERL 周回軌道のように多数の構成要素 (偏向、四極、六極磁石) を含んだ長距離のビーム輸送系に対して、粒子追跡コードを用いて反復計算

を行いながら最適なパラメータ・セットを求めるのは、困難であり時間がかかるので現実的でない。本稿では、これに代わる手法として、電子ビーム輸送系の設計に古くから用いられている “R-Matrix” を拡張し、CSR 効果を計算する方法を提案する [4]。

一様磁場 (偏向磁石) 中の電子の運動 (偏向面 = x 方向) は、近軸軌道近似のもとで次式のように表される。

$$x'' = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} (\delta_0 + \delta_{csr} + \kappa[s - s_0]) \quad (1)$$

ここで、 x は基準軌道からの偏差、 s は基準軌道に沿った進行方向の座標、 s_0 は偏向磁石入口の座標、 x'' は s による二階微分、 ρ は偏向軌道の曲率半径、 δ_0 はエネルギー偏差の $s = 0$ における初期値で基準エネルギー E_0 で規格化した値、 δ_{csr} は偏向磁石の上流 ($0 < s < s_0$) において CSR 効果により生じたエネルギー偏差、 $\kappa \equiv W/E_0$ は偏向磁石中で電子が感じる CSR のウェーク場 $W[eV/m]$ を基準エネルギーで規格化し $[m^{-1}]$ の次元をもつ量で、規格化 CSR ポテンシャルと呼ぶことにする。

ここで、解析対象のビーム輸送系全体にわたって、以下の条件が満たされることを仮定する

- すべての偏向磁石が同一の曲率半径を持つ、
- 電子バンチの縦方向分布が不変である (バンチ圧縮 / 伸長がない)、
- 偏向磁石の入口 / 出口における過渡的な CSR 効果の影響が小さい。

ERL 型放射光源の周回軌道においては、これらは妥当な仮定である。

これらの条件のもとでは、規格化 CSR ポテンシャルを個々の電子に付随する変数と考えることができる。すなわち、個々の電子の運動は偏向磁石入口における 5 次元ベクトル: $\vec{x}(s_0) = (x, x', \delta_0, \kappa L_b, \kappa)^T$ によって一意に与えられる。ただし、 $L_b(s_0)$ は $0 < s < s_0$ における偏向磁石長の合計値であり、 $\delta_{csr}(s_0) = \kappa L_b(s_0)$ の関係を満たす。

偏向磁場中の電子の運動は、ベクトル \vec{x} の各要素を式 (1) にしたがって計算することで求められる。この計算は運動量分散を含んだ電子軌道解析 (例えば [5] 参照) のように、行列演算に置き換えることができ、偏向磁石入口 ($s = s_0$)、出口 ($s = s_1$) におけるベクトル \vec{x} は、偏向磁石の変換行列を用いて

$$\vec{x}(s_1) = R_{bend} \vec{x}(s_0) \quad (2)$$

と表せる。行列の具体的な要素はグリーン関数を用いた

¹E-mail: hajima@popsvr.tokai.jaeri.go.jp

計算 [5] によって、次のように求められる。

$$R_{bend} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho(1 - \cos \theta) & \rho^2(\theta - \sin \theta) \\ \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ 0 & 0 \\ 1 & \rho\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

これは、運動量分散を含んだ電子軌道解析で用いられている“R-Matrix”の拡張である。四極磁石等についても同様の行列が求められる。

初期エネルギー偏差によって基準軌道から外れる電子の運動は、運動量分散関数 (momentum dispersion function) によって記述できる。

$$\begin{pmatrix} \eta_x(s_1) & \eta'_x(s_1) & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\ = R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} \eta_x(s_0) & \eta'_x(s_0) & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (4)$$

ここで $\eta_x(s)$ が運動量分散関数である。これと同様に、CSR 効果によって基準軌道から外れる電子の運動を表す目的で、CSR ウェーク分散関数 $\zeta_x(s)$ を定義する。

$$\begin{pmatrix} \zeta_x(s_1) & \zeta'_x(s_1) & 0 & L_b(s_1) & 1 \end{pmatrix}^T \\ = R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} \zeta_x(s_0) & \zeta'_x(s_0) & 0 & L_b(s_0) & 1 \end{pmatrix}^T, \quad (5)$$

CSR 効果による個々の電子の変位は (x, x') 平面において、 $\vec{d} = (\kappa\zeta_x, \kappa\zeta'_x)$ で与えられる。

CSR によりバンチ内に生じるエネルギー広がり (rms) は、バンチの縦方向分布が Gaussian の時

$$\Delta E_{rms} \simeq 0.22 \frac{eQL_b}{4\pi\epsilon_0\rho^{2/3}\sigma_s^{4/3}} \quad (6)$$

で与えられる。ここで Q はバンチの電荷量、 σ_s はバンチ長である。 (x, x') 平面におけるバンチスライス変位の広がり (rms) は、これから評価することができ、 $(d, d') = (\Delta\kappa_{rms}\zeta_x, \Delta\kappa_{rms}\zeta'_x)$ となる。ただし、 $\Delta\kappa_{rms} = \Delta E_{rms}/E_0$ である。したがって、CSR 効果を含んだエミッタンスは、

$$\varepsilon = \sqrt{(\varepsilon_0\beta_x + d^2)(\varepsilon_0\gamma_x + d'^2) - (-\varepsilon_0\alpha_x + dd')^2} \quad (7)$$

と計算できる。 ε_0 は CSR が無い場合の非規格化エミッタンス、 $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ は偏向方向の Courant-Snyder パラメータである。

3. ERL 周回軌道におけるエミッタンス増大とその補償

CSR 効果によって個々のバンチスライスに生じる不均一なエネルギー変化は、偏向磁石通過後に (x, x') 平面における基準位置からの変位を生じる。これがエミッタ

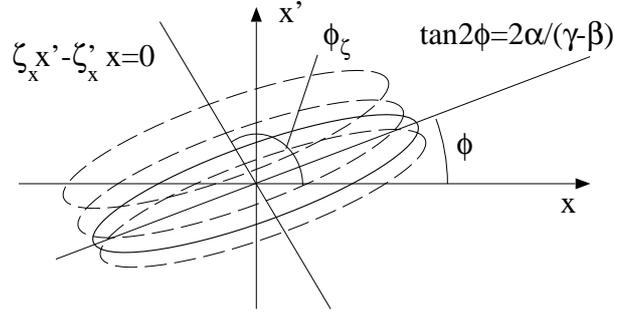


図 2: (x, x') 平面におけるビーム楕円の変位とエミッタンス増大。CSR はバンチスライス毎に異なる変位を与えるので、エミッタンスが増大する。 (α, β, γ) は Courant-Snyder パラメータ。

ッタンス増大である。一次近似のもとでは、各バンチスライスは $\zeta'_x x - \zeta_x x' = 0$ 直線上に並ぶ (図 2)。

CSR によるエミッタンス増大を最小にするには、 (x, x') 位相平面において CSR キックによるバンチスライスの変位の向きと、ビーム楕円の長軸を一致させる、つまり、偏向後のベータatron関数 (β_x) と CSR 分散関数 (ζ_x) の位相を一致させればよいことがわかる (図 3 参照)。この条件を満たすビーム輸送系の設計は、行列計算の手法で簡単に求めることができる。

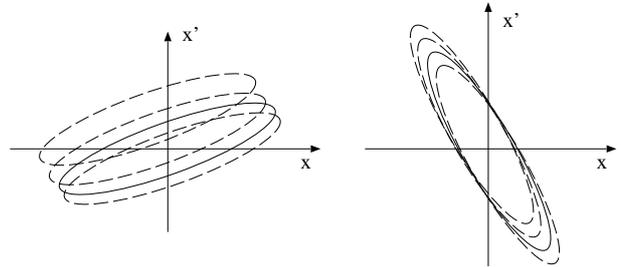


図 3: CSR によるバンチスライスの変位の向きと、ビーム楕円の長軸を一致させることでエミッタンス増大を最小にできる。(左) はエミッタンス増大が大きい例、(右) はエミッタンス増大を最小にする例。

ERL 放射光源の周回軌道は、アンジュレータを設置する直線部を挟んで偏向部 (アクロマティック・セル) が並ぶ構成である。ここでは図 4 のような TBA セル (triple-bend achromat) を例にとり、CSR によるエミッタンス増大を計算してみる。



図 4: ERL 周回軌道を構成するアクロマティックセルの例。軌道半径 25m、偏向角度 $(3+6+3=12)$ 度とした。

行列計算の手法を用いて、アイソクロナス ($R_{56} = 0$) の条件で、かつ、CSR によるエミッタンス増大が最小となるように TBA セルの Q の値を決めた時のベータatron関数 (β_x)、運動量分散関数 (η_x)、CSR ウェーク分

散関数 (ζ_x) を示したのが図 5 である。3 番目の偏向磁石を出た後の β_x と ζ_x が符合が逆であるが同じエンベロープを描いているのがわかる。

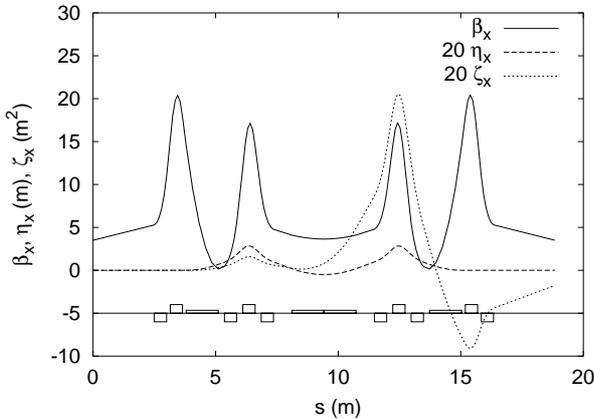


図 5: CSR によるエミッタンス増大を最小にするようなビームエンベロープ (行列計算により求めた)。

本稿で提案した行列計算の妥当性を検証するために、粒子追跡コード (ELEGANT[6]) との比較を行った。電子パンチのパラメータは、3.07GeV ($\gamma = 6000$)、電荷量 $Q = 770\text{pC}$ 、初期規格化エミッタンス $\varepsilon_{n,0} = 0.1\text{mm-mrad}$ 、パンチ長 $\sigma_s = 30\mu\text{m}(100\text{fs})$ 、初期エネルギー広がりが $\sigma_E/E_0 = 0.02\%$ である。パンチ内の電子分布は 6 次元の Gaussian を仮定した。図 5 の TBA セルについて、電子ビームの入射条件 (セル入口における Courant-Snyder パラメータ) を変化させた場合のセル通過後のエミッタンスを計算した。セル入口におけるビームパラメータは、 $-5.0 < \alpha_x < 3.0$ 、 $\gamma_x = 0.29\text{m}^{-1}$ とした。なお、粒子追跡計算では、粒子数 100 万個、計算ステップ 1cm とし、十分な計算精度を確保している。

図 6 は、3 番目の偏向磁石出口における α_x に対して、式 (7) と粒子追跡の両者から求めた規格化エミッタンスを比較したものである。両者の結果はよく一致しており、本稿で提案した行列計算の手法が CSR 効果によるエミッタンス増大の解析に有効であることが確認された。また、アクロマティックセルの設計とビームの入射条件を選べば CSR 効果を最小する解が存在することも示された。

4. まとめと今後の展開

行列計算を使って CSR 効果を含んだビーム軌道解析が行えることを示した。これにより、CSR 効果によるエミッタンス増大を考慮した ERL 周回軌道の設計が簡便かつ迅速に実行可能となる。また、ERL 周回軌道におけるエミッタンス補償と、これを実現するためのセルの構成を議論するための基本原理が、行列計算により明らかになった。

今後は、既存のビーム軌道設計コードへの本手法の組み込みを進めたい。さらに、原研 ERL を使って、CSR 効果によるエミッタンス増大 / 補償の実験を行うことを検討している。

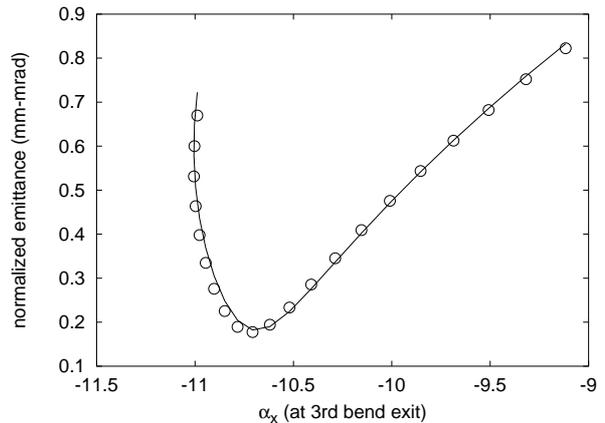


図 6: ビームの入射パラメータを変えた時のエミッタンス増大の違い。横軸は 3 番目の偏向磁石出口の α_x 、実線は行列計算、(○) は ELEGANT コードによる粒子追跡計算の結果。

参考文献

- [1] Ya.S. Derbenev, J. Rossbach, E.L. Saldin, V.D. Shiltsev, DESY, TESLA-FEL 95-05 (1995); B.E. Carlsten and T.O. Raubenheimer, Phys. Rev. **E51** (1995) 1453; B.E. Carlsten, Phys. Rev. **E54** (1996) 838.
- [2] R. Hajima et al., Nucl. Instr. Meth. **A429**(1999) 264; H. Braun et al., Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 658; S. Okuda et al., Nucl. Instr. Meth. **A445** (2000) 351.
- [3] R. Hajima, E. Ikeno, Nucl. Instr. Meth. **A429** (1999) 315; A. Kabel et al., Nucl. Instr. Meth. **A455** (2000) 185; M. Borland: Phys. Rev. ST Accel. Beams **4** (2001) 070701.
- [4] R. Hajima, Jpn. J. App. Phys., Vol. 42(2003) No. 8A, to be published.
- [5] H. Wiedemann: *Particle Accelerator Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1993) p.107.
- [6] ELEGANT version 14.8, Nov 26 2002; M. Borland: Argonne National Laboratory Advanced Photon Source Report No. LS-287 (2000).