



# 単粒子力学上級編

平田光司

高エネルギー加速器研究機構

総合研究大学院大学・加速器科学専攻

hirata@kekvox.kek.jp、

## Contents

1	はじめに：Advanced Dynamicsとは何か？	1
2	加速器における座標系	1
2.1	粒子軌道の構成要素：LEGO	2
2.2	局所座標系と局所力学	3
2.3	座標系の大局的構造	6
2.4	Local-Globalの区別	8
3	1自由度のGlobal Nonlinear Dynamics	9
3.1	Global Dynamics の実演	9
3.2	シンプレクティック挿入	10
3.3	シンクロトロン放射	13
3.4	Dynamic BetaとDynamic Emittance	15
4	3Dの線形力学	16
4.1	Dispersion	16
4.2	Time Dispersion	18
5	おわりに	19

## 1 はじめに：Advanced Dynamicsとは何か？

単粒子ビーム力学を上級編まで学習する動機は大きく分けて二つあるように思われる。つまり

1. 加速器の設計、建設、運転に有用な知識を獲得する。
2. 加速器における力学理論の論文を書けるようになる。

前者は「職業教育」にあたり、後者は「学問教育」にあたるだろう。「あまり学問教育をやりすぎると、はじめに加速器の仕事をしなくなるから良くない」、とかいうタイプの人がかっこういるようだが、そういう人は無視しましょう（だんだん減少すると思われる）。逆に、「加速器の設計ができればいいのだから、学問教育は適当でいいや」というのは最も危険で、こういう態度では（特にこれからの進んだ）加速器の設計はおろか、運転もできないことになるであろう。力学理論を、加速器における問題意識を持って（論文が書けるくらい）きちんと学び、加速器の建設に生かせば、大きな威力を発揮するであろう。

---

<sup>0</sup>ビーム物理冬の学校 1998

私が学生時代に愛読した電磁気学の教科書 [1]のまえがきには、「この本を読んでもテレビは組み立てられない」と書いてある。パーツを買ってきてテレビを組み立てるようにするのが「職業教育」で、テレビが映る理由が説明でき、新基軸のテレビを考案できるようにするのが「学問教育」であろう。

学問には当然「遊び」の要素もある。趣味的な研究と言われるものがそれで、オリジナルのだけを取りえの論文もたくさんある。しかし、逆に画期的な論文はたいてい趣味的な研究の成果である。「仕事は手抜きしてもよいが、趣味は手抜きできない」とはよく言われる。良い意味で趣味的か、悪い意味で趣味的かは、研究の迫力で決まるので、客観的基準は無い。その、迫力があるか無いかは、現実の加速器を想定しているか否かによるのではないかと思っている。迫力は無いがジャーナルに載りやすいのは既存のフォーマリズムを無批判に踏襲し、ちょっと一般化するタイプのもので、意味ないの多い。良い意味での学問教育は、良い意味での職業教育でもある。(悪い意味での学問教育と悪い意味での職業教育は正反対である)。

さて、ここでは、「趣味的」なビーム力学を講義したい。私としては「良い意味」で趣味的だと思っているが、「迫力ない」と言われれば、返す言葉はない。

## 2 加速器における座標系

ビーム力学は、なにはともあれ、ビーム粒子の運動を記述するのであるから、運動を記述する枠組みである座標系について真面目に考えておかなければならない。しかし、座標系について正面から論じた論文はほとんど無い。

加速器における座標系で一般的なのはフレネ=セレであろう。しかし、実はフレネ=セレ座標系は大局的で連続な座標系としては使えないものである。(大局的で連続な座標系は必要ないことをこれから示す)。また、直線部で $x, y$ 座標が一意的に決まらないのも困る。ここではフレネ=セレは使うが局所座標系に基礎を置く方法を紹介する[2]。加速器としては円形加速器を想定するが、以下に述べることは線形加速器でもtransfer lineでも有効である。

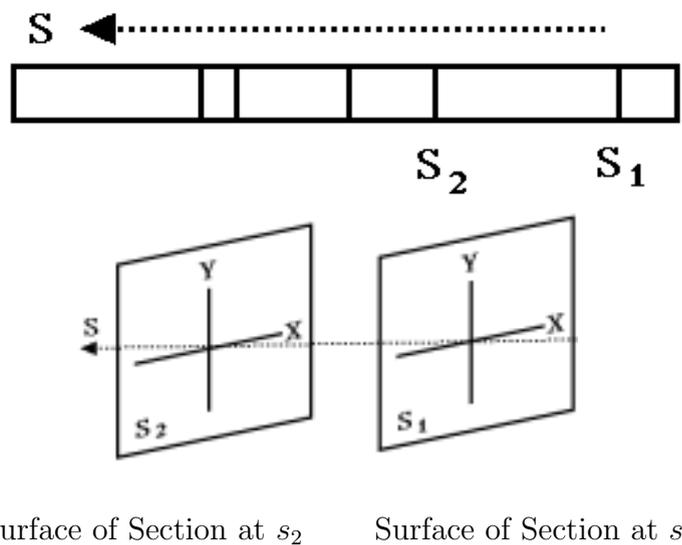


Figure 1: ビーム粒子の座標系は $s$ を「時間」変数として用いる。粒子の運動は各 $s_i$ で定義された6次元位相空間の座標間の変換として表される。

## 2.1 粒子軌道の構成要素：LEGO

加速器がある。これは設計段階では直線部と曲率一定のベンド部からできている。このデザイン軌道を  $r(s)$  と書く。ここで  $s$  はある点 ( $s_0$ ) から、注目している点までの長さ

$$ds = d|r|$$

である。「デザイン軌道」と書いたが、これは曲線であれば良いのであって、何らかの仮想粒子の物理的軌道である必要はない。

さて、各  $s$  には粒子の運動を特徴づける力学変数の空間がくっ付いている。最も使われる例は6次元の位相空間（位置と運動量）であろう。このように、各  $s$  にくっ付いた位相空間を切断面 (Surface of Section) と呼び  $S(s)$  で表す。（「切断空間」と呼ぶほうがいいと思うが、習慣にしたがう）。 $S(s_1)$  から  $S(s_2)$  までは直積、 $S \times [s_1, s_2]$  である。これをLEGO ( $L(s_2, s_1)$ ) と呼ぶ。例えばDrift空間、B magnetの入り口から出口までなどを考えれば良い。

$S(s_1)$  から  $S(s_2)$  への写像を与えるのが力学である。これととなりあったLEGO 同士の関係は幾何学であり、力学と幾何学で粒子の大局的な運動が記述できる。

さて、加速器では3種類のLEGOがあれば十分であって、それは

- 直線 → straight section (Quad 等あっても良い) : ドリフト
- 曲率一定の扇型 → B magnet : ベンド
- 長さ0のSheet → edge effect など : つなぎ

である。図2参照。「つなぎ」については、ちょっと後で説明する。

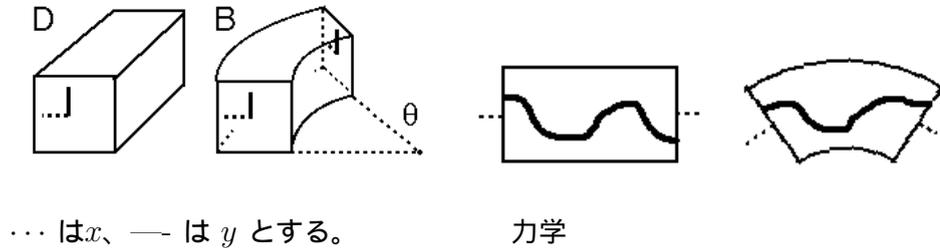


Figure 2:

力学の役割は  $S(s_1)$  から  $S(s_2)$  までの写像 (map) を与えることである。切断面  $S(s)$  としては次のようなものが考えられる。

- (古典力学) 6次元位相空間  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ 。力学はHamiltonian  $H_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  で記述される：つまり

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial H_{12}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H_{12}}{\partial x_i}, \quad (1)$$

の解で  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})_{s_1}$  の初期条件のもとに(1)を解いたものである。古典力学の追加メニューとしては

1. シンクロトロン放射[3]
2. 残留ガスとの散乱[4]
3. ビームビーム制動放射[5]

などの確率過程がある。その場合力学は

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial H_{12}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H_{12}}{\partial x_i} + \hat{r}_i,$$

となる。ここで $\hat{r}_i$ は確率変数である。また、intra-beam相互作用も確率過程だが、これには他の粒子の情報も必要になるので、ここでは論じない。

- (Polarization) 6次元位相空間座標 $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ に加えて、粒子のスピンを表す(2成分)スピノルも考える。
- (Envelope 力学) 行列 $\Sigma_{ij} = \langle x_i x_j \rangle$  (Envelope) [6]。EnvelopeがLEGO内でどう変化するかを論じる。これは電子ビーム平衡分布(さらに平衡エミッタンスなど)を計算するとき用いられる[3]。
- (量子力学) 波動関数 $\psi(x)$ 。加速器中のDirac 方程式を論ずる場合。
- などなど

## 2.2 局所座標系と局所力学

LEGOにおける座標系の定義を論ずる。ドリフトとベンドとつなぎだけ考えれば良いのでこれは簡単。

♡フレネ = セレ座標系の復習： 中心線を

$$\mathbf{r}(s), \quad ds = d|\mathbf{r}| \quad (2)$$

として、単位接線ベクトル

$$\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds \quad (3)$$

が定義される。主、副、法線ベクトル $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  は

$$\mathbf{n} = -\rho d\mathbf{t}/ds, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \quad (4)$$

で定義され、

$$\mathbf{t}' = -\mathbf{n}/\rho, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{t}/\rho, \quad \mathbf{b}' = 0. \quad (5)$$

を満たす。ここで捩率(torsion)が出てこないことに注意。実際、捩率は不要である。(Drift または Bendしか考えないから)。一般の粒子の位置は

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) + x\mathbf{n} + y\mathbf{b} \quad (6)$$

とあらわされる。ここで、 $s = s(t)$ なので結局、世界点は

$$(x, y, s, t) \quad (7)$$

であらわされる。ふつうの物理では $t$ を時間パラメタとし、 $(x, y, s)$ を力学座標とする(物理座標)。加速器では $s$ を(時間)パラメタとし、 $(x, y, t)$ を力学座標とする(加速器座標)。

♡加速器座標での運動方程式： 物理座標では変分原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt (-mc^2 \sqrt{1 - (d\mathbf{u}/cdt)^2} + e\mathbf{A} \cdot d\mathbf{u}/dt - e\phi) = 0$$

から $t$ をパラメタとした運動方程式が導かれる[1]。加速器座標にするには

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} ds (-mc \sqrt{(ct')^2 - (\mathbf{u}')^2} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}' - e\phi t'), \quad \mathbf{u}' = d\mathbf{u}/ds.$$

つまり、 $s$ を「時間」、 $(x, y, t)$ を「座標変数」だと思って、Lagrangian

$$\begin{aligned} L &= -mc \sqrt{(ct')^2 - (\mathbf{u}')^2} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}' - e\phi t' \\ &= -mc \sqrt{(ct')^2 - (1 + \frac{x}{\rho})^2 - (x')^2 - (y')^2} \\ &\quad + e \left\{ (1 + \frac{x}{\rho}) A_s - x' A_x - y' A_y - t' \phi \right\} \end{aligned}$$

から出発すれば良い[7]。ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(s) &= \mathbf{r}(s) + x(s)\mathbf{n}(s) + y(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{r}' + x'\mathbf{n} + x\mathbf{n}' + y' \\ &= (1 + \frac{x}{\rho})\mathbf{t} + x'\mathbf{t} + y'\mathbf{b} \\ A_x &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, \quad A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}, \quad A_s = \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}. \end{aligned}$$

注意点としては

- ソレノイドがあると $A_x, A_y$ が必要。
- Electric Separator では $\phi$ が必要。
- $\rho$ は中心線 ( $r$ ) の曲率半径。換率は不要。

などがある。

正準運動量は

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{mcx'}{\sqrt{(ct')^2 - (1 + x/\rho)^2 - (x')^2 - (y')^2}} + eA_x \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{mcy'}{\sqrt{(ct')^2 - (1 + x/\rho)^2 - (x')^2 - (y')^2}} + eA_y \\ p_t &= \frac{\partial L}{\partial t'} = \frac{-mc^3 t'}{\sqrt{(ct')^2 - (1 + x/\rho)^2 - (x')^2 - (y')^2}} - e\phi \end{aligned}$$

Hamiltonianは

$$\begin{aligned} H &= x'p_x + y'p_y + t'p_t - L \\ &= -(1 + \frac{x}{\rho}) \sqrt{(p_t + e\phi)^2/c^2 - m^2c^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2} \\ &\quad - e(1 + \frac{x}{\rho})A_s. \end{aligned}$$

♡超相対論的近似： 多くの場合、超相対論的近似 ( $m \rightarrow 0$ ) が用いられる。また、デザイン軌道上をデザイン運動量  $p_0$  で動いている仮想的粒子 (基準粒子) を考え (この粒子が運動方程式に従って運動している必要は無い)、この粒子との差をとって、

$$z = s - ct, p_z = p - p_0, p = |\mathbf{p}|, \quad (8)$$

という変換 (この仮想粒子は  $z = 0$  に居る) を行う。ここで  $p$  は空間的運動量の絶対値  $p$  である。さらに

$$(p_x, p_y, p_z; H) \rightarrow \frac{1}{p_0} (p_x, p_y, p_z; H), \quad (9)$$

とハミルトニアンと運動量をスケールしておく (これによって、たとえば  $p_x$  は大雑把に言って  $x' = dx/ds$  と近いものになる。(しかし、この両者は異なるもので、この違いが本質的に重要になることが多い。特にシンクロトロン振動を考慮に入れる場合、 $x'$  は使うべきでない。) ここでの  $p_z$  は  $z$  方向の運動量ではなく、シンクロトロン方向の運動量

$$p_z = \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{E - E_0}{E_0}$$

であることに注意。同様に  $z$  も  $z$  方向の座標ではなく、むしろ基準粒子との時間差である。

結局、各LEGO ( $s_1 \leq s \leq s_2$ ) では、その中心線 ( $r$ ) に準じて定義された (フレネ = セレ座標に準じて定義された) 正準座標

$$\mathbf{x} \equiv (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$$

に関して写像が行われる。これは局所力学と呼ばれる。

ところでこうして作ったハミルトン方程式は一般には解けない。「解けない」とはどういう意味かは詳しくは文献[8]参照。簡単に言えば終状態を初期状態の初等関数、または既知関数の積分を用いて、つまり解析的に書けないということである。これを「解ける」形で近似する手法の一つが Symplectic Integrator[9]である。「解けない」系では一般にカオスが生じる (あとで、図7のあたりで議論する)。

### 2.3 座標系の大局的構造

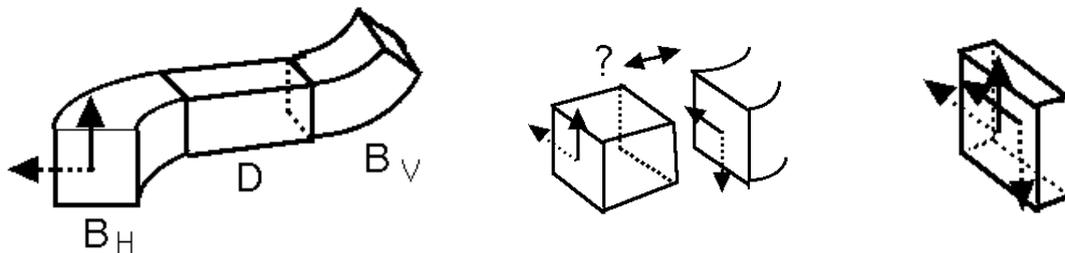


Figure 3: 水平ベンドのあとに垂直ベンドがあると (左)  $x$  軸が重ならない (中)。そのため、薄さ 0 の「つなぎ」 (右) で「矛盾」を隠ぺいする。

フレネ = セレ座標は局所的にしか定義できない。デザイン軌道が平面的(planner)ならば大局的にも定義できるが、スピンローテーターなど、垂直ベンドがデザインに入っていると、もはや大局的な定義は不可能である。各LEGOでは局所座標系が定義された。LEGOをつなげていくとき、例えば  $x$  座標

が自然に $x$ 座標につながれば良いが、たとえば水平ベンドのあとに垂直ベンドがあるとまずい。これは図3から明らかであろう。

この矛盾を隠すため、特別な、薄さ0の要素を用いる。この要素におけるmapは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$(p_x, p_y)$ についても同様、である。これはつまり粒子に、これまで $(x, y)$ だと思っていたのが今から変わることを教えてやるためのものと言えよう。

このように各「つなぎ」 $s_i$ は角度 $\phi_i$ の回転を行う。では、この様にしてリングを一周作るとどうなるか？一般には最後の「つなぎ」でも回転が必要である。このように、リング一周の座標系は、本質的に平行移動である各LEGO内の座標系と、LEGO同士のつなぎ方を記述する「つなぎ」によって定義される。これは、多様体の定義に似ているが、むしろFibre Bundle[10]と呼ばれる位相幾何学の概念によってよりよく理解されるであろう。切断面に棲むものが、座標であろうが、Envelope、波動関数であろうが、すべて同じ「つなぎ」の構造を持つ。(Fibre Bundleの言葉では円形加速器における力学は  $U(1)$ 上の $U(1)$  Bundle上で定義される[2].)

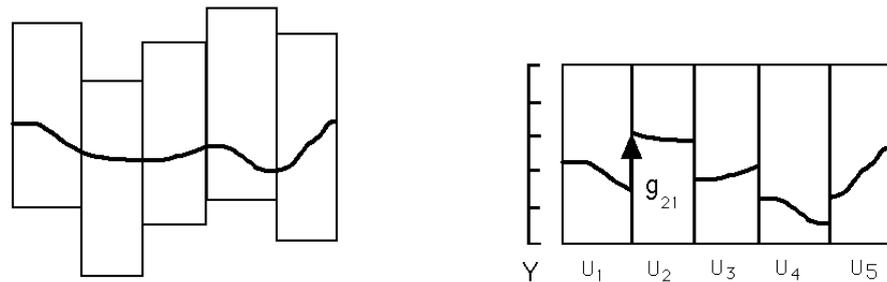


Figure 4: ファイバーバンドルの概念図。物理的には粒子の軌道は連続だが（左）各局所座標系（LEGO）では不連続となる。LEGOから次のLEGOに移る時には両座標間の変換（つなぎ）を要する（右）。

ファイバーバンドルによる定式化は、粒子トラッキングの計算機コードに向く。(フレネ=セレでコードを作るのは、悪夢であろう。図3のような状況では、中間のDriftの所で人工的に $x, y$ 座標系をスムーズに回転させねばならず、そこでコリオリ力が出てくるなど、悲惨なことになる。)

LEGOを使わずに、平行移動で座標系を定義する第2の方法についてもちょっと紹介しておく。平行移動の方法は理論的な扱いに向く。これは図5のように、 $s_0$ から出発して次々に平行移動していくもので[11]、最後に1回は「つなぎ」的な回転が必要となる。この最後の回転角 $\Phi$ は中心線の単位接ベクトルがリング一周で作る立体角に等しい[12]。これはガウス=ポルネの定理である[13]。

## 2.4 Local-Globalの区別

座標はlocalに定義された。そこでの運動もlocalである。物理的に、粒子の運動を追うのに他の場所の知識は必要ないはずで、LEGOによるlocalな記述は実は最も物理的なものである。しかし、たとえばベータatron関数( $\beta$ )はglobalな量で、 $\beta$ を知るにはリング全体の知識が必要である。つまり、 $\beta(s)$ は $s$ の場所の性質を表しているわけではない。このように、ビーム力学ではglobalな量が多用される。チューンがglobalな量であることはすぐ分かるが、phase advance (位相進み)、Twiss parameterなどの量は $s$ によることでもあり、一見localな量に見えてしまう。これは加速器屋の職業病であろう。

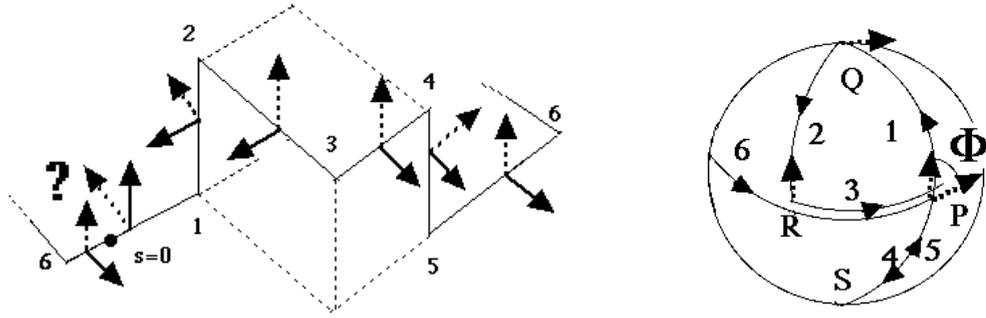


Figure 5: (左) 平行移動によって座標系を定義する。「1」に垂直ベクトルがある。「2」は水平(?)ベクトルである。法線ベクトルが平行移動していく感じをつかむこと。(右) このときの接線ベクトルの向きを始点を固定して描いたもの。番号は左図に対応している。 $s = 0$ のところでは $\pi/2$ の回転が必要であることは右図から見てとれる。

(「 $\beta$ の測定」などと言う場合、かなり注意していないといけない。これら $s$ -dependentでglobalな量というのはベクトルポテンシャルに似ていて、ゲージを決めておかなければ、物理的意味を持たない。) 次の様な表を常に頭に入れておく必要がある[2]。localな力学を議論するときglobalな概念を用いるのは(正しく定義されている限り)可能だがかなりアホらしいことである。(これがどんなにアホらしいかを実演して見せたのが文献[3]の後半であるが、どうも冗談ととられていないようで、困ったことである。)

Localに定義されるもの <i>one-turn map</i> を作る	Globalに定義されるもの <i>one-turn map</i> の解析
reference coordinate	closed orbit
deviation from nominal orbit	betatron amplitude
magnetic field	betatron function
beam envelope	equilibrium emittance
amount of synchrotron radiation	damping partition number

♡**Global Dynamics:** local dynamicsの集積で $s_0$ から $s_0$ への*one-turn map*ができる。

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})$$

これがGlobal Dynamicsの出発点であり、逆に*one-turn map*ができたらlocal dynamicsは忘れても良い。ハミルトン系なら*one-turn map*の $f$ はSymplecticである。つまり、

$$M_{ij} = \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j},$$

で定義されるヤコビ行列 $M$ が

$$M J M^t = J \tag{10}$$

を満たす。ここで  $J$  は

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

で、(うまい呼び方が無いので) Symplectic Metric などと呼ぶ。  
この  $f$  の不動点

$$f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \quad (11)$$

が ( $s_0$  における) closed orbit に他ならない。closed orbit のまわりで  $f$  を線形化したものが one-turn matrix  $M^0$ :

$$M_{ij}^0 = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_0}.$$

で  $M_0$  は Symplectic 行列

$$M_0 J M_0^t = J \quad (12)$$

である。式(10)と(12)の違いに注意。前者は  $x$  の関数関係だが後者は数の行列の関係である。

### 3 1 自由度の Global Nonlinear Dynamics

#### 3.1 Global Dynamics の実演

リングの一方所 (観測点  $O$  と呼ぼう) で加速器のビームを観察してみる。なるべく話を簡単にするために、1 自由度のみを考える。つまり相空間は

$$(x, p_x)$$

とする。この点で観測するかぎり、粒子の一周写像は

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) \quad (13)$$

という非線形写像であらわされるであろう。ハミルトン系ならばヤコビ行列

$$m = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial p_x} \\ \frac{\partial p_x'}{\partial x} & \frac{\partial p_x'}{\partial p_x} \end{pmatrix} \quad (14)$$

が シンプレクティック条件

$$m J m^t = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たすことは前に述べた。

♡不動点 まず、不動点 $x_0$

$$x_0 = f(x_0) \quad (15)$$

を求める。これは一意的に存在するとは限らない：

- 不動点が複数個存在する場合（integer resonanceのそばではありえる。また多重周期の不動点は一般に多数存在する（2重周期というのは $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_0 \rightarrow x_1 \dots$ というもので半整数共鳴のそばでありえる。n重周期の不動点がn-次の共鳴に他ならない）。
- 不動点が存在しない場合（極端な例としては $x' = x + a, p' = p$ で $a$ は零でない実数）。

などがあり得る。実際に加速器を設計する時には、この不動点が存在してパイプの中央に来るようにしておく。ここでは不動点がデザイン座標（ $x = 0$ ）のそばに存在する場合に限定する。

♡不動点の安定性と線形写像 不動点があっても安心できない。これが安定である必要がある。一周写像を $x_0$  のまわりで線形化する。つまり

$$\begin{pmatrix} x' - x^0 \\ p'_x - p_x^0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x - x^0 \\ p_x - p_x^0 \end{pmatrix} + (x - x^0, p_x - p_x^0) \text{に関する非線形項} \quad (16)$$

この行列 $M$ を一周行列と呼ぶ。 $M$  はシンプレクティック行列で、シンプレクティック条件

$$MJM^t = J$$

を満たす。2行2列のシンプレクティック条件は $\det M = 1$  と同値であるので特に簡単である。

「 $M$  の固有値の絶対値がすべて1であることと、不動点 $(X_0, P_0)$  が安定であることが同値である」ことは良く知られている[14]。不動点 $x_0$  の十分近くでは一周写像の線形近似がよく成り立ち、(16)の非線形項を落とすことができる。（線形近似が成り立つ範囲をできるだけ大きくすることがoptics設計者の腕である。このためのマニュアル的方法はない）。

♡線形一周写像の標準形 さて、 $M$  の固有値がすべて絶対値で1なら、それらは

$$\text{EigenValues}[M] = \{\exp i\mu, \exp -i\mu\}.$$

と書ける。 $\mu = 2\pi\nu$  において $\nu$  をチューン (tune) と呼んでいる。この時、適当な線形シンプレクティック (正準) 変換 $A$

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x - x^0 \\ p_x - p_x^0 \end{pmatrix}$$

によって、座標 $(x, p_x)$  を再定義し $(X, P)$  に作用する一周行列 $M$ を

$$AMA^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \equiv m \quad (17)$$

の形にすることができる。この $A$ は標準的に

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta} & 0 \\ -\alpha/\sqrt{\beta} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} \quad (18)$$

と書かれるが、この $\alpha, \beta$ がTwissパラメタに他ならない。

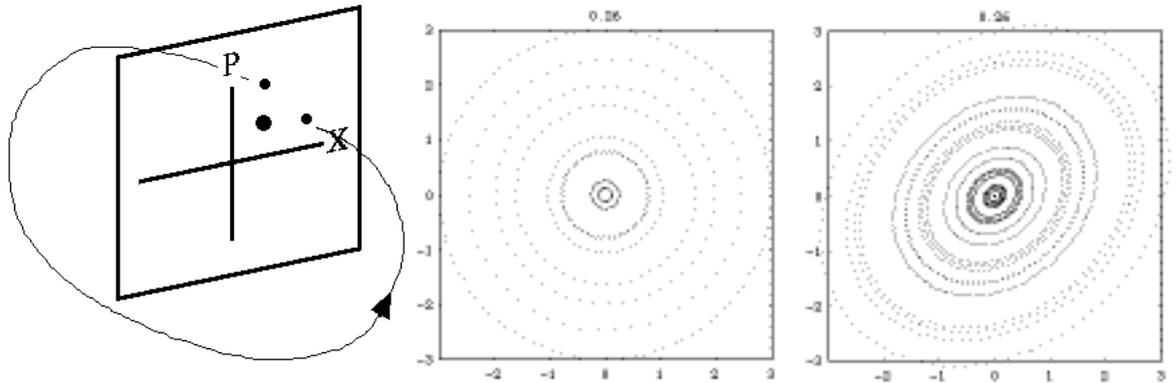


Figure 6:

ポアンカレプロット：ある $(X, P)$ から出発した粒子を、それが観測点 $O$ に来るたびに相平面上にプロットして得られる図。(図6(左)参照)。新しい座標 $(X, P)$ に関しては、一周写像は原点の近くで $X' = mX$ であり、そのポアンカレプロットは図6(中)のようになる。

このポアンカレプロットに関するかぎり、時間パラメータを $\theta$ として(リング一周で $2\pi$ 進む)、ハミルトニアンが

$$H(X, P) = \frac{\nu}{2}(X^2 + P^2)$$

であると考えても良い。(  $\theta = 2n\pi$  から  $\theta = 2(n+1)\pi$  への変化だけを問題にする )。これを  $2n\pi < \theta < 2(n+1)\pi$  の場合にも成り立つとする近似はスムーズ近似として時々使われている。

### 3.2 シンプレクティック挿入

加速器の設計がうまく行って、原点のまわりの十分大きな領域で線形近似が成り立っているとす。この、「よくできた」加速器に更に何かを付け加えることを考える。

(0)場所によらない非線形要素 もっとも簡単な場合はハミルトニアンが時間 $\theta$ によらない場合である。リングに一樣に非線形磁場を導入したと考えてもよいし、(16)で非線形項を(一部)とりいれたと考えてもよい。このときハミルトニアンは

$$H(X, P) = \frac{\nu}{2}(X^2 + P^2) + V(X) \quad (19)$$

となる。ここで、 $V(X)$  は、3次以上の多項式とする。この様に、摂動が $\theta$ によらないものであれば、(1自由度なら)系は求積法により完全に解けてしまう。つまり、 $H = E = \text{const.}$  なので

$$p = \frac{dx}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{\nu} [E - (\frac{\nu}{2}X^2 + V(X))]},$$

となり、これを解いて $\theta = \theta(x)$ 、この逆関数が $x = x(\theta)$ で解けた。この近似は簡単すぎ、ほとんど非現実的で、あまり役に立たない。(シンクロトロン振動をこのように取り扱うことはよくある。Synchro-Betatron couplingが無く、synchrotron tune  $\nu_z$ の絶対値が小さい場合にはこの近似でよいであろう。)

(1)局所線形要素 観測点 $O$ に理想的4極磁石を新たに置く。この時、 $O$ における写像は

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}' = K \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

となる( $k$ はある定数)。

一周行列は $MK$ となる。

この挿入による効果は

- テューンの変更： $MK$ の固有値 $\exp \pm i\bar{\mu}$ は

$$\cos \bar{\mu} = \cos \mu - \frac{k}{2} \sin \mu \quad (21)$$

$$\bar{\nu} = \nu - \frac{k}{4\pi} \text{ となる}$$

- 相平面が図6(右)のように変形する。

などで、劇的变化はない。これは $A$ 、(18)と $\nu$ の再定義で吸収されてしまう。

(0)と(1)は積分可能な例であって、一粒子のポアンカレプロットが一本の曲線に乗っている。つまり、切断面において $X$ と $P$ の間にある関係 $g(X, P) = 0$ があって、 $g$ が運動の定数となっている。(自由度 $2N$ の系に $N$ 個の保存量があれば積分可能系である[14, 15])。

(2)簡単な局所非線形要素 簡単な系なのに積分不能な例。リングの一箇所に非線形力が加わった場合。非線形力としては8極磁石を考える。

$$X' = X, \quad P' = P - cX^3 \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X'' \\ P'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ P' - c(X')^3 \end{pmatrix}$$

この系は積分不能である。じっさい、ポアンカレプロットをしてみると図7のようにになっている：中心から外に向かって：

1. 正則領域：摂動計算でまかなえる。 $g(X, P)$ のような近似的保存量がある(それがactionである)。
2. カオス領域：摂動計算ではまったくどうしようもない領域。一つの粒子の断面が2次元的に広がる。この領域の中で、粒子は乱数的に動き回り、力学系があたかも(疑似)乱数発生器のようにふるまう。明らかに $g(X, P)$ のような保存量が存在しない。
3. 4次の共鳴：目玉の領域で、その範囲内では正則な運動をする。
4. その外側にまた正則領域がすこしある。
5. 力学口径(dynamic aperture)：「この内側の点は常に内側にとどまる」ような領域の境界。
6. 発散領域：力学口径の外側には、 $(X, P) \rightarrow \infty$ となる領域がある。

ここで出てきた「力学口径」はビーム力学のキーワードの一つで、「その内側の点は常に内側にとどまる」という領域の外縁のことだが、

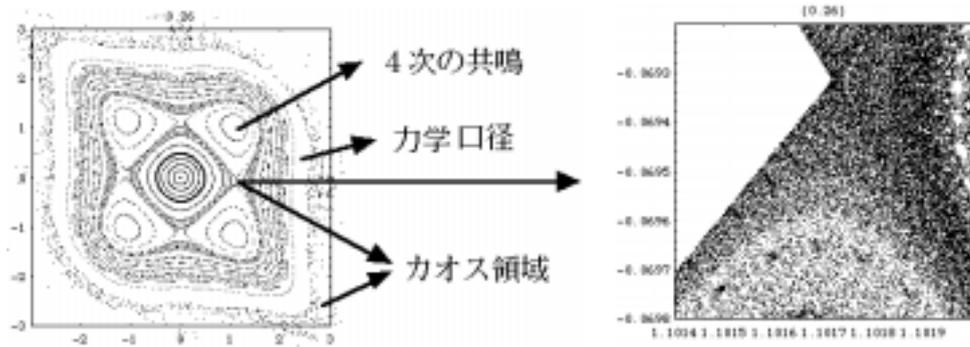


Figure 7: 非線形な挿入をした時のポアンカレプロット。多くの粒子について描いてある。(右)はカオス領域の拡大図。ここでは1粒子についてのプロットが平面的に広がる。 $\alpha = 1$ ,  $\nu = 0.26$ を用いた。

- そういうものが存在するという証明は無い。(自由度1のtime-dependent系の場合、「力学口径」は一番外側の「KAM曲線[16]」のことであり、その存在も証明されている。)
- ましてHamiltonianから計算できた人はいない。
- とはいっても、実際には、ビームが加速器を回っている時間(数時間から一日)のあいだ、内側にとどまっていれば良いので、 $\infty$ の時間に関する力学口径を問題にしくなくても良い。
- このためには、シミュレーションによって、長時間、粒子を追跡するしかない。
- 有限の手続きで、その存在自体を含めて、3次元の力学系の力学口径を求めるアルゴリズムはありそうも無い。しかし、粒子の長時間安定性は例えば磁石の製作精度に対する要求に直接関係しており、「加速器物理の根本問題」の一つである。これに関するどんな情報も、確実なものであれば第一級の業績となるであろう。(いいかげんな「理論」で人を惑わす奴は永久追放に値する)。

ハミルトン系については以上で終わるが、最後にまとめをしておく。時間( $s$ )によらないハミルトン系では以下のことが知られている。

1. 1自由度 積分可能
2. 2自由度 積分不能だがKAMの定理が成り立って、力学開口の存在は保証されている。
3. 3自由度以上 力学開口の存在は不明。またArnold拡散が存在する。

時間による系では、次元を1つ足せばよい。そこで、ここであつてきた系は自由度2、実際の加速器の系は自由度4に対応する。

### 3.3 シンクロトロン放射

シンクロトロン放射によって力学系に減衰と拡散が起きることは良く知られている。これによって、電子リングのビームは平衡分布を持つ。平衡分布の求め方を知るには、加速器の利用者には文献[17]が適切な参考書であろう。この文献では、いわゆる放射積分(radiation integral)の方法が解説されていて、それは文献[18]に定式化されている。ところで、放射積分の方法は自由度間のカップリングが無いときはいいが、カップリングがあると、どうしようもないもので、それに替わるより一般性のある方法が文献[3]である。基本的な発想については文献[6]を見よ。

さて、シンクロトロン放射を出すと、その粒子の運動量は

$$P \rightarrow P - \alpha P \quad (23)$$

のように変化する。光子の持ち去る運動量はもとの粒子の運動量と平行である。ここで $\alpha P$ は光子の運動量（適当にスケールされている）で、 $\alpha$ そのものは、放出された光子のエネルギーと関係している確率変数である。多数のイベントの平均としては

$$P \rightarrow (1 - \langle \alpha \rangle) P$$

となり、シンクロトロン放射の影響は平均として摩擦項になる。また、光子の放出そのものが量子的過程であることから、 $P$ に対する拡散効果も生ずる。（確率過程としての取り扱いをきちんと勉強するには文献 [19] がもっとも分かりやすいと思われる。）

一周写像は

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}' = \Lambda M \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} + (\text{平均値 0 の確率変数})$$

となる。ここで  $\Lambda$  は一周行列の非シンプレクティック部分で単位行列に近い。 $\Lambda$ 、や確率変数の具体的な形を求めるにはリング全周にわたる情報が必要であるが、もっともありそうな形は

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}' = \lambda M \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

であることがわかっている。ここで、 $\lambda$  は 1 より少し小さい定数、 $\hat{r}_1$ 、 $\hat{r}_2$  は平均ゼロ、標準偏差 1 のガウス乱数<sup>1</sup>である。

シンプレクティック部分が線形であれば、平行分布はガウス型になることが分かっている。ガウス分布は

$$\psi(X, P) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp -\frac{1}{2} \Sigma_{ij}^{-1} (X - \bar{X})_i (X - \bar{X})_j \quad (25)$$

のことで、 $\bar{X}$ 、 $\Sigma$ などはモーメント

$$\text{1 次のモーメント } \bar{X} = \langle X \rangle, \quad \bar{P} = \langle P \rangle,$$

$$\text{2 次のモーメント } \Sigma = \begin{pmatrix} \langle X^2 \rangle - \bar{X}^2 & \langle XP \rangle - \bar{X}\bar{P} \\ \langle XP \rangle - \bar{X}\bar{P} & \langle P^2 \rangle - \bar{P}^2 \end{pmatrix}$$

である。 $\Sigma$ をEnvelopeとも呼ぶ。Envelopeの一周写像は

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{P} \end{pmatrix}' = \lambda M \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{P} \end{pmatrix}, \quad \Sigma' = \lambda^2 M \Sigma M^t + a^2 I \quad (26)$$

であるが、この（漸近、定常）解は $\Sigma' = \Sigma$ とにおいて、

$$\Sigma^\infty = \frac{a^2}{1 - \lambda^2} I$$

<sup>1</sup>厳密には $\hat{r}$ はガウス型からわずかにずれているはずである。中心極限定理は、多くの拡散事象を等重率で足し合わせた場合に成り立つもので、この例のように減衰項があると、最近の事象は重みが大きくなって、定理がなりたたない。

である。エミッタンス<sup>2</sup>は  $\sqrt{\det \Sigma}$  で、これはSymplectic Motionの不変量である：

$$\Sigma \rightarrow M\Sigma M^t, \quad \det \sigma \rightarrow \det \Sigma'. \quad (27)$$

$\Sigma_\infty$ が定常エミッタンスを与える：

$$\epsilon \equiv \sqrt{\det \Sigma^\infty} = \frac{a^2}{1 - \lambda^2}$$

定常分布は結局

$$\psi^\infty(X, P) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \exp - \left( \frac{X^2 + P^2}{2\epsilon} \right)$$

となる<sup>3</sup>。

### 3.4 Dynamic BetaとDynamic Emittance

このへんで、local-globalの議論を蒸し返しておこう。電子リングの一箇所( $s_0$ )にQ磁石を挿入する。挿入前の一周写像は：

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \cos \mu_0 & \beta_0 \sin \mu_0 \\ -\sin \mu_0 / \beta_0 & \cos \mu_0 \end{pmatrix}$$

挿入後には：

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \rightarrow MK \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4\pi\xi_0/\beta_0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

新しいチューン $\nu$ は前に(21)でやったように

$$\cos \mu = \cos \mu_0 + \xi_0 \sin \mu_0 \quad (28)$$

から求められる。 $s_0$ における新しい $\beta$ は

$$K^{1/2}MK^{1/2} = \begin{pmatrix} \cos \mu & \beta \sin \mu \\ -\sin \mu / \beta & \cos \mu \end{pmatrix}$$

とおけるはずであることから

$$\beta = \beta_0 \frac{\sin \mu_0}{\sin \mu} = \frac{\beta_0}{\sqrt{1 + 4\pi\xi_0 \cot \mu_0 - 4\pi^2\xi_0^2}}$$

であることがわかる。これはdynamic beta 効果という有名なもので、Q-挿入によって $\beta$ が変化し、ビームサイズが変わることを表している [20]。これだと図8からわかるように、ビームサイズがいくらでもしぼれることになる。

<sup>2</sup>2,3自由度の場合には

$$\text{emittances} = \text{Abs}[Eigenvalues[J\sigma]]$$

<sup>3</sup>これも $\hat{r}_i$ のガウス型からのずれと同様、(たとえ $\hat{r}_i$ がガウス乱数でも) 厳密には正しくない。

しかし、シンクロトロン放射がある場合には

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \rightarrow \lambda MK \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = e^{-\delta}$$

を解けばビームサイズがわかる。同値な式

$$\Sigma = (\lambda MK)\Sigma(\lambda MK)^t + D, \quad D = \epsilon_0 \sqrt{1 - \lambda^2} \begin{pmatrix} \beta_0 & 0 \\ 0 & \beta_0^{-1} \end{pmatrix}$$

を解けばEnvelopeがすべて求められる。これは手計算ではちょっと大変だが、数値的には3行3列の行列の逆をもとめるだけのことである。近似的な解は手計算でもとまり[6]、エミッタンスは

$$\epsilon = \frac{1 + 2\pi\xi_0 \cot \mu_0}{1 + 4\pi\xi_0 \cot \mu_0 - 4\pi^2\xi_0^2} \epsilon_0 + O(\delta) \quad (29)$$

となる。

以上の計算に必要なリングの知識はすべて一周写像に含まれていることに注意してほしい。一周写像が得られたらリング各地点の情報を忘れてもよい、というのはこういうことである。

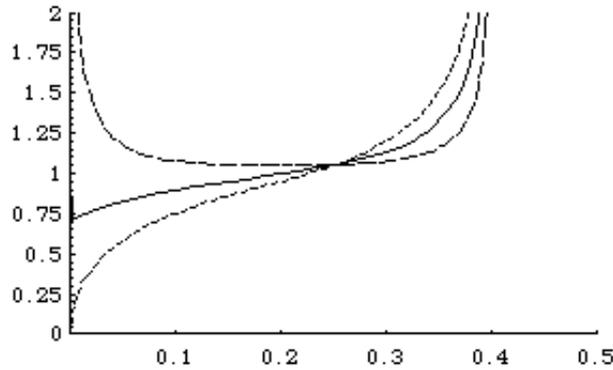


Figure 8:  $\xi_0 = 0.05$ . --- =  $\sigma/\sigma_0$ ; - · - =  $\epsilon/\epsilon_0$ ; · · · =  $\beta/\beta_0$ .

次の練習問題は参考になろう[21]。

- Eq.(28)の結果を超有名な式

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{ds}{\beta}$$

を用いて導け。

- SandsのRadiation Integralを知っている人は、(29)をRadiation Integralを用いて導け。
- 線形の挿入ではエミッタンスは変わらない。にもかかわらず定常エミッタンスが変わるのは変ではないか？

## 4 3Dの線形力学

3自由度の取り扱いではシンクロトロン振動が難しい。ここではベータトロン振動は1自由度のみとしシンクロトロン振動を取り入れた議論を行う [22]。シンクロトロン振動が難しいのはDispersionという概念に固執するからで、これも職業病といえる。

## 4.1 Dispersion

私の知るかぎりすべての教科書には、Dispersionは  $E = const$  の粒子のclosed orbitと書いてある。定義は明確であるが、シンクロトロン振動していると  $E = const$  の粒子など存在しない。(陽子リングだと2つは存在してもよい。それ以上はフェルミの排他原理により禁止される。これはまったくの余談である)。それでもいいのか？Dispersionについて改めて考えてみよう。

RF加速のないリング(コースティングビーム)では  $E = const$  で、一周行列は

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & a_1 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & a_2 \\ b_1 & b_2 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。2行2列の  $m$  は横方向の運動にあたり、右下のブロックはシンクロトロン方向の運動を表している。ここで  $a$  と  $b$  は両者の結合を表している。これらは独立ではなく、 $M$  のSymplecticity から

$$\mathbf{a} = mJ\mathbf{b}$$

の関係がある。

$M$  は

$$G(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 1 & 0 & -\eta' \\ \eta' & -\eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

によって ( $2 \times 2$  ブロックに) 対角化できる:

$$\hat{M}_{cb}(s) = G^{-1}(s)M_{cb}(s)G(s) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{M},$$

ここで

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = (I - m)^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

がDispersionを与え、

$$\alpha = l - \mathbf{a}^t J (I - m)^{-1} \mathbf{a} \quad (31)$$

はmomentum compaction factorである。

つまり

$$G^{-1} \begin{pmatrix} y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \eta p_z \\ p_y - \eta' p_z \\ z + \eta y - \eta' p_y \\ p_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Y \\ P \\ Z \\ Q \end{pmatrix}$$

が Normal Modeで、一周行列だけでなく、任意の区間の転送行列も

$$M_{cb}(s_1, s_2) = G^{-1}(s_1)M_{cb}(s_1, s_2)G(s_2) = \hat{M}(s_1, s_2)$$

と対角化される。

シンクロトロン振動があったらどうなるか？

リングの一箇所( $s_0$ )にRF Cavityを挿入してみよう。RF Cavityにおけるmapは

$$\begin{pmatrix} y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}' = R \begin{pmatrix} y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^t & k & 1 \end{pmatrix},$$

であり、一周行列は

$$M_{arc}(s) = M_{cb}(s + C, s_0) R M_{cb}(s_0, s)$$

である。前と同じ $G(s)$ を作用させることによって

$$\begin{aligned} & G^{-1}(s) M_{arc}(s) G(s) \\ &= G^{-1}(s) M_{cb}(s + C, s_0) G(s_0) G^{-1}(s_0) R G(s_0) G^{-1}(s_0) M_{cb}(s_0, s) G(s) \\ &= \hat{M}(s + C, s_0) G^{-1}(s_0) R G(s_0) \hat{M}(s_0, s), \end{aligned}$$

となるが、もし Cavityで $\eta = 0, \eta' = 0$ なら $G(s_0) = I$ なので、上式で

$$G^{-1}(s_0) R G(s_0) = R$$

となり、これも $2 \times 2$ のブロックに対角化されている。つまり、CavityをDispersionの無い所に挿入する限り、一周行列は同じ $G(s)$ で対角化されることが分かった。この場合にはコースティングビームにおけるのと同じ様に、Dispersionが定義され、一周行列も対角化される。

ついでに一周行列 $\hat{M}$ の右下ブロックは

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、driftとkickの組み合わせで(弱)収束になっている。このためシンクロトロン振動が起きるのである。(この安定性から $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ と $k$ の符合間に関係が付き、transitionの前後で $k$ の符合を反転させなければならないことが解る)。

## 4.2 Time Dispersion

では、cavityにDispersionがあったらどうなるか？この場合Dispersionだけで一周行列を対角化することはできそうもないことが次のような考察から予想される。シンプレクティック行列の定義(12)から $4 \times 4$ のSymplectic Matrixには10個の自由度があることがわかる。(  $n \times n$ のSymplectic Matrixの自由度は $n(n+1)/2$ である。これを対角化するのも10個のパラメタが必要ははずだが、今の所

tune	2
$\beta$	2
$\alpha$	2
$\eta, \eta'$	2
total	8

で、パラメータがたりない！

♡ $2 \times 2$  matrix  $m$  の場合 :

$$m = t \begin{pmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} t^{-1}, \quad t = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ -\alpha/\sqrt{\beta} & 1/\sqrt{\beta} \end{pmatrix},$$

で  $\alpha, \beta, \mu$  の 3 個のパラメタがある。

♡ $4 \times 4$  matrix  $M$  の場合 :

$$M = H \text{diag}(m_u, m_v) H^{-1},$$

$$H = \begin{pmatrix} bI & h \\ \tilde{h} & bI \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} \zeta & \eta \\ \zeta' & \eta' \end{pmatrix}, \quad b = \sqrt{1 - \det(h)},$$

$h$  は  $2 \times 2$  matrix で

$$\tilde{h} = j h^t j = \begin{pmatrix} -\eta' & \eta \\ \zeta' & -\zeta \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

と対角化できる[3, 7]。  $H$  も  $M$  も symplectic である :

$$H^t J H = J, \quad J = \text{diag}(j, j).$$

つまり残りの 2 個の自由度として、 $\zeta$  は time dispersion とでも呼ぶべき  $\zeta, \zeta'$  が必要となる。

$$\langle Y^2 \rangle = \langle P^2 \rangle = \epsilon_u, \quad \langle Z^2 \rangle = \langle Q^2 \rangle = \epsilon_v, \quad \langle YP \rangle = 0, \quad \langle ZQ \rangle = 0, \quad \text{etc}$$

と「仮定」すると[23]

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= b^2 \beta_u \epsilon_u + \{ \eta^2 + (\beta_v \zeta - \alpha_v \eta)^2 \} \beta_v^{-1} \epsilon_v \\ \langle p^2 \rangle &= b^2 \gamma_u \epsilon_u + \{ \eta'^2 + (\beta_v \zeta' - \alpha_v \eta')^2 \} \beta_v^{-1} \epsilon_v, \\ \langle z^2 \rangle &= \{ \eta^2 + (\alpha_u \eta + \beta_u \eta')^2 \} \beta_u^{-1} \epsilon_u + \beta_v b^2 \epsilon_v \\ \langle \delta^2 \rangle &= \{ \zeta^2 + (\alpha_u \zeta + \beta_u \zeta')^2 \} \beta_u^{-1} \epsilon_u + b^2 \gamma_v \epsilon_v, \\ \langle yp \rangle &= -\alpha_u b^2 \epsilon_u + \{ \gamma_v \eta \eta' - \alpha_v (\eta \zeta' + \zeta \eta') + \beta_v \zeta \zeta' \} \epsilon_v, \\ \langle yz \rangle &= -b (\alpha_u \eta + \beta_u \eta') \epsilon_u - b (\alpha_v \eta - \beta_v \zeta) \epsilon_v, \\ \langle y\delta \rangle &= b \beta_u (\alpha_u \zeta + \beta_u \zeta') \epsilon_u + b (\gamma_v \eta - \zeta) \epsilon_v, \end{aligned}$$

ただし  $\gamma = (1 + \alpha^2)/\beta$ .

これから  $\zeta, \zeta'$  の意味を直感的に読み取れるだろう。RF に Dispersion がなくても、Dispersion のあるところに Q-magnet を挿入したら、 $\zeta, \zeta'$  が現れる。(あたりまえ、挿入によって Cavity に Dispersion ができるから)。

♡ $6 \times 6$  の場合 : 文献[3, 7]を見よ。

## 5 おわりに

最初に述べたように、ここではかなり「趣味的」なビーム力学について述べた。これらを知らなくても加速器の設計、運転はできるかもしれない。実際の加速器ではたいていデザイン軌道は平面的だし、Cavityにディスパージョンは無い。しかし、実際に、スピンローテーターを考えたりCavityにおけるディスパージョンの影響を評価したくなれば、雑な議論を積み重ねて混乱するよりは、趣味的世界に走ったほうが結局は早道であろう。より根本的なことは、ビーム力学で用いる概念の首尾一貫性ということである。近似的な概念というのは厳密な概念の上に成り立つもので、近似的な概念のみで成り立つ学問は無い。

たとえば、（と言っても筆者はしろうとだが）原子核物理学を理解するのに、弱い相互作用は重要だろう。これにはフェルミ相互作用を用いれば十分な精度でさまざまなプロセスが評価できる。しかし、フェルミ相互作用はくりこみ不能な理論であって、理論としての首尾一貫性は無い。このくりこみ不能性の問題はWeinberg-Salamの理論、およびW,Zボソンの実在によって解決された。原子核における弱い相互作用の計算にWeinberg-Salamの理論を使う必要は無いかもしれないが、これは原子核物理に理論としての首尾一貫性が無くてもかまわない、ということでは無い。ふだんはフェルミ4体相互作用を使っても、いざという時にはWeinberg-Salamが必要になる、ということを知らないと、変な近似にもとづく精密な計算をして、うまく行っても、くりこみ不能性を再発見することになる。

ビーム物理[24]を追求するうえで、また一般に物理を追求するうえで、「物理的直感」を大事にすることは必要だが、「物理的直感」に捕らわれないことのほうがもっと大事であろう。加速器物理では直感的理解というのはたいてい1Dの概念を3Dに使うことであり、正しいこともあれば誤っていることもある。豊かな直感的理解を持ちつつ、それを疑いながら現実のビームに係わるのがビーム物理の基本的姿勢ではないだろうか。

## References

- [1] 砂川重信「理論電磁気学」紀伊国屋書店。
- [2] E.Forest and K.Hirata, A Contemporary Guide to Beam Dynamics, KEK Report 92-12 (1992)。
- [3] K. Ohmi, K. Hirata and K. Oide, *From the Beam Envelope Matrix to Synchrotron Radiation Integrals*, Phys. Rev. **E49**, 751 (1994).
- [4] K. Hirata and K. Yokoya, Part. Accel. **39**, 147 (1992).
- [5] E.S. Kim and K. Hirata, *Simulation of Tail Distributions due to Random Processes and Beam-Beam Interaction in KEKB*, proc. '97 Particle Accelerator Conference. KEK Preprint 97-27 (1997).
- [6] K. Hirata and F. Ruggiero, *Treatment of Radiation in Electron Storage Rings*, CERN Report, LEP Note 611 (1988). K. Hirata and F. Ruggiero, *Treatment of Radiation for Multiparticle Tracking in Electron Storage Rings*, Part. Accel. **28**, 137 (1990). (Proceedings of XIV Int. Conf. on High Energ. Accel. 1989 Tsukuba.)
- [7] 生出勝宣、ビーム力学入門、JLC-FFIR92研究会講義録・研究報告集、田内利明、山本昇編集、KEK Proceedings 93-6 (1993)。現代的単粒子力学の解説で、専門家をめざす人の必読文献である。
- [8] 平田光司、「加速器科学における古典力学」、数理科学1995年6月号。
- [9] 吉田春夫、「シンプレクティック数値積分法」、数理科学1995年6月号。および H.Yoshida, Phys.Lett. A150 (1990) 262。および本誌。

- [10] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press (1951). 吉岡書店から日本語訳が出ている。
- [11] K. Yokoya, KEK Internal 85-7, November 1985, A.
- [12] K. Hirata and S. Petracca, *A Geometrical Horizontal Vertical Coupling*. Proc. '96 European Particle Accelerator Conference. KEK Preprint 96-52(1996). (EPAC'96 Proc.)
- [13] 小林昭七「曲線と曲面の微分幾何」、裳華房基礎数学選書。
- [14] V.I.アーノルド、「古典力学の数学的方法」(岩波書店)。
- [15] 大貫、吉田「現代の物理学 1 力学」岩波書店。
- [16] 例えば、A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, “Regular and Stochastic Motion”, Springer-Verlag (1983).
- [17] M. Sands, SLAC report, SLAC-121 (1970);
- [18] R. H. Helm, M. J. Lee, P. L. Morton and M. Sands, *Evaluation of synchrotron radiation integrals*, IEEE Trans. Nucl. Sci. **NS-20**, 900 (1973).
- [19] K. Hirata, *Beam Lifetime*, KEK Preprint(1998).
- [20] B. Richter, Proc. Int. Symp. Electron and Positron Storage Rings, Saclay, I-1-1 (1966).
- [21] 解答：
1.  $\beta$ がリングの各点でどういう値をとるのかわからないので、何らかの仮定のもとに解くしかない。
  2. これは1よりさらに大変で、 $\beta$ だけでなく、 $\alpha$ , Dispersionも知らなければならない。
  3. エミッタンスは(27)のようにシンプレクティック変換の不変量ではあるが、放射の影響まで入れた変換の不変量ではないからである。Q-magnet通過の瞬間には $\epsilon$ は不変であるが、リングを一周してもどって来た時には違っている。
- 1も2もまともには解けない問題であるが、こういう問題を深く考えればlocal-globalの区別がどうして大事か解るかもしれない。問題1、2のような計算方法でないと気持ち悪いとしたら、もはや職業病と言える(Courant-Snyder-Sands中毒?)。3も、「線形写像ではエミッタンス不変」という、それ自体では正しい言明を誤って用いたために起きるまちがいである。
- [22] S.Petracca and K.Hirata, Proc. 12th ICFA Beam Dynamics Workshop (1996).
- [23] S.Petracca and K.Hirata, Proc. PAC'97(1997).
- [24] 安東、井上、片山、平田、「ビームの物理」、日本物理学会誌、1997年2月号。